〔増補新版〕

超積と超準解析

ノンスタンダード・アナリシス

東京大学教授
理 学 博 士　齋藤正彦

東京図書株式会社

装幀　戸田ツトム

まえがき

1960年ごろ A. ロビンソンは，モデル理論の考えを使うことによってライプニッツ流の無限小解析をそのままの形で合理化することができるのではないか，という着想を得た．これが超準解析（non-standard analysis）のはじまりである．その後，超積の理論とも結びついて超準解析は急速に発展し，ロビンソンのはじめの期待を超えて，数学の各分野でのきわめて魅力的な手段となった．この間，ロビンソンは精力的に理論を深め，応用し，本を著し，研究者を育てたが，1974年に急逝した．

超準解析によれば，たとえば実数体の超準モデルとして，実数体を真に含む全順序体が作られる．そこには無限大超実数，すなわちどんな実数よりも大きい数や無限小超実数，すなわちどんな正の実数よりも小さく，しかもゼロより大きい数が存在する．しかも，ある意味で実数体に関して成りたつ性質はすべて超実数体，すなわち拡大された体でも成りたち，逆もまた真である．これにより，ライプニッツが構想しながら，ついに合理化されずに一旦は滅びた無限小解析が，ほとんどそのままの形で甦える．同じ考えは位相空間にも自然に適用され，たとえばチホノフの定理の証明が著るしく簡単になる．

この本は超準解析の概要と二三の応用を，超積の概念を強調しながら解説したものである．読者としては，ある程度の数学的素養（知識および感覚）はありながら，数学基礎論の素養をまったく欠く人を想定している．

そのために，第一にモデル理論の援用を最小限にとどめ，集合論の枠の中で理論を展開する．基礎論に慣れた人は迂遠な感じをもつかもしれない．だが，私自身はこのやりかたではじめて超準解析を理解することができた．

第二に超積の概念を強調し，つねに超冪モデルを頭において話を進める．超積は普通の数学内部の概念だから，だれにも抵抗がないし，普通の数学者が手で触れた感じをもつことのできる範囲内にある．

この本を書くに当って参考にした本や論文についてはあとがきで触れる．超準解析の枠は本書で大体十分のはずだが，その応用についてはごく一部に触れるだけである．その他の応用に関する文献もあとがきで挙げる．

＊　＊　＊

第一章ではまず自由超フィルターという概念を導入し，それを法とする集合族の超積を定義する．実数体の超冪として超実数体を作り，これによって無限小解析がどのように合理化されるかを示す．この章では論理を形式化しない．だから基礎論の嫌いな人にも抵抗はないはずである．しかし，ここの内容ぐらいが，論理を形式化せずにすむことがらの限界でもある．

第二章で超準解析の枠組を作る．ここで採用したやりかたは，マクホヴァーによるもので，すべて集合論の枠内でことが運ばれる．しかし論理は部分的に形式化する．モデルの概念が定義され，標準モデルの超冪として超準モデルが構成される．

一般の超準モデルでは超準解析は十分に展開できない．そのために，第三章でまずモデルの広大化という概念を定義し，標準モデルの広大化として広大モデルを，また自分自身の広大化として飽和モデルを定義する．広大モデルが以後の理論展開の場となる．超準解析の鍵となるのは，第二章で確立する《モデル同値の原理》および広大化の性質である《共起性の原理》の二つである．

第四章では位相空間の一般論を超準解析の言葉で書きかえる．その応用として，よく知られたいくつかの定理に簡単な超準的証明を与える．たとえばチホノフの定理，ハール測度の存在定理等である．

第五章では函数解析に属するある型の問題を超準的に扱い，それを超函数および測度に適用する．結果は未完であるが，私のつもりとしては，これは第四章のように既成の理論を単に書きかえようとするのではなく，大げさに言えば自然解釈の言語としての数学の拡大を目指すものである．

＊　＊　＊

二人の友人，倉田令二朗および広瀬健の協力がなければこの本はできなか

った．そもそも，超準解析への興味を私に吹込んだのは倉田である．次第にそれに惹かれ，深入りしたあげく，1975年度の冬学期に私は東京大学で超準解析の講義をした．そのときのノートがこの本のもとになった．その講義の準備の段階から本の仕上げの段階に至るまで，私は二人にものを教わり続けた．しかも二人は忙がしい時間を割いて原稿を精読し，貴重な助言を与えてくれた．とくに第三章は，二人の意見に従って書き直したものである．さらに二人は私の頼みを容れて討論会に出席し，大局的かつ専門的な立場から超準解析への考えかたを披瀝してくれた．その上，広瀬は付録《数学基礎論からの抜萃》を書いて，超準モデル存在のメカニズムを一般的な視点から明らかにしてくれた．

そのほかたくさんの方々から御好意や貴重な御注意を受けた．一々お名前は挙げないが，厚くお礼を申上げる．

1976年9月4日　東京で　　　　齋藤正彦

増補版への序文

初版から十年たった．本書は基礎理論の教科書だから，大筋を変える必要はまったくない．ただ，十年前には登場したばかりだったローブ測度の理論が，以後の超準確率論の発展の基礎になった．そこで新版にはローブ測度の基礎理論の解説を加えることにした．何かの役に立てば幸いである．

なお，新稿は釜江哲朗さんおよび木下素夫さんに読んでいただき，たくさんの貴重な御注意を受けた．厚くお礼を申しあげる．その木下さんが2月3日に急逝された．木下さんは最近，精力的に超準解析の研究を進めていらっしゃった．本書の初版にはたびたびお誉めや助言をいただき，また大いに内容を利用していただいた．深い悲しみとどうしようもない空虚感に浸りながら，この本を木下さんの霊に捧げたい．

1987年3月　　　　齋藤正彦

目　次

まえがき

序　章　集合論の要約……………………………………………………………………… 1

§1　集合に関する基礎概念………………………………………………………………… 1

§2　二項関係．写像または函数…………………………………………………………… 2

§3　集合族．積集合または直積．選択公理……………………………………………… 3

§4　同値関係．分割．商集合……………………………………………………………… 4

§5　順序……………………………………………………………………………………… 5

§6　濃度……………………………………………………………………………………… 6

§7　論理記号………………………………………………………………………………… 7

第一章　超積と無限小解析　………………………………………………………………… 9

§1　超フィルター…………………………………………………………………………… 9

フィルター——超フィルター——自由超フィルター

§2　超積……………………………………………………………………………………14

超積——順序構造——代数構造

§3　無限小解析……………………………………………………………………………18

超実数体の構造——極限および連続性——微分——＊有限和と積分

§4　非可測函数の構成……………………………………………………………………27

§5　超積の濃度……………………………………………………………………………28

練習問題　…………………………………………………………………………………31

第二章　超準モデルとくに超冪モデル　…………………………………………………33

§1　宇　宙…………………………………………………………………………………33

宇宙 U——順序対および有限積——関係．函数．無限積

§2　言　語…………………………………………………………………………………37

言語 $\mathscr{L}$——論理式の解釈と文の真偽——論理式の例および略記法

§3　標準モデルと超準モデル……………………………………………………………43

$\mathscr{L}$ 系とモデル——$\mathscr{U}$ の諸概念を $^*\mathscr{U}$ へ移すこと

§4　超冪モデル……47
§5　内集合と外集合……50
＊集合の領域——内集合と外集合——超冪モデルにおける写像の延長定理——＊有限性——＊有限和
§6　応用：定積分……57
練習問題……59

第三章　モデルの広大化，とくに広大モデルと飽和モデル……61
§1　モデルの広大化．広大モデル・飽和モデルの定義と性質……61
広大化・広大モデル・飽和モデルの定義——広大化・広大モデル・飽和モデルの性質——飽和モデルに特有の性質
§2　正則超フィルターによる広大モデルの構成……67
濃度に関する補題——正則超フィルター——正則超冪モデル——正則超冪の濃度
§3　善良超フィルターによる飽和モデルの構成……72
善良超フィルター——善良超冪モデル
練習問題……76

第四章　位　　相……78
§1　位相空間の単子……78
§2　諸概念の超準的取扱い……80
分離性——連続写像および積位相——コンパクト性
§3　標準諸定理の超準的証明（例示）……84
§4　位相群……85
位相群の単子——単子群による位相の導入——ハール測度の構成
§5　単子場と位相……90
フィルターと単子との対応——＊フィルターの標準部分——位相空間の単子場の延長——推移的な単子場と位相との対応——応用：正則性と正規性
練習問題……97

第五章　函　数　解　析……99
§1　函数空間からの線型写像……99
Xに位相がない場合——Xに位相がある場合——一般函数とくに超函数

§2　正値線型形式……………………………………………… 107
　　正値線型形式——測度——無原子測度
練習問題 ……………………………………………………… 118
付録Ⅰ　善良超フィルターの存在証明 ……………………… 119
§1　順序数および基数の理論（要約）…………………… 119
§2　存在定理の証明………………………………………… 121
付録Ⅱ　数学基礎論からの抜萃　広瀬健 ………………… 130
付録Ⅲ　討論：超準解析とは何か　倉田令二朗・広瀬健・齋藤正彦………134
付録Ⅳ　増補　ローブ測度 ………………………………… 153
あとがき ……………………………………………………… 171
事項索引 ……………………………………………………… 179
記号索引 ……………………………………………………… 182

序章　集合論の要約

この章の目的は，集合に関する基本的な用語および記号を確定し，同時に必ずしも周知とは言えない概念や定理をはっきり述べることである．これらは第一章を読むのにはほとんど必要ないから，まず第一章を読んでから，必要に応じてここを見ることをすすめる．

証明は付けない．読者が背景に想定する集合論は，素朴なものでもよいし，公理によるものでもよい†．

§1　集合に関する基礎概念

0.1.1　$a \in A$ ないし $A \ni a$ は，a が集合 A の元であることを表わす．《a は A に属する》ないし《A は a を含む》と読む．$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ は，A の元が $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の全部であることを表わす．a_i と a_j とは異ならなくてもよい．

A が集合，x が A を走る変数，$\phi(x)$ が x に関するある性質を表わすとき，$\{x\,;\,x \in A, \phi(x)\}$ または $\{x \in A\,;\,\phi(x)\}$ は，A の元 x で $\phi(x)$ をみたすもの全部の集合を表わす．《…であるもの全部の集合》と言うかわりに，《…であるものの全体》という言いかたをする．

f が A から B への写像のとき，$\{f(x)\,;\,x \in A, \phi(x)\}$ は，$\phi(x)$ をみたす A の元 x の f による像の全体を表わす．

0.1.2　$\varnothing$ は空集合，$\boldsymbol{N}$ は自然数 $0, 1, 2, \cdots$ の全体，$\boldsymbol{Z}$ は整数の全体，$\boldsymbol{Q}$ は有理数の全体，$\boldsymbol{R}$ は実数の全体，$\boldsymbol{C}$ は複素数の全体を表わす．

0.1.3　A, B が集合のとき，$A \subset B$ ないし $B \supset A$ は《$x \in A$ なら $x \in B$》を意味する．$A=B$ の場合も含まれることに注意せよ．このとき A を B の部

---

† 集合論の参考文献は，この章の終り（8ページ）にまとめて挙げてある．

分集合と言う．また，《A は B に含まれる》，《B は A を含む》とも言う．《含む》という言葉は $A \ni a$, $B \supset A$ の両方に使われるが，誤解を招くことはないと思う．

合併 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$（共分と略すこともある）は周知のとおり．Aの元であってBに属さないものの全体を $A-B$ と書く．

A の部分集合の全体を A の冪（ベキ）集合と言い，$\mathscr{P}(A)$ と書く．

0.1.4　　A, B が集合のとき，A の元 x と B の元 y との順序対（また単に対（ツイ））(x, y) の全体を A と B との**積集合**または**直積**と言い，$A \times B$と書く．同様に $A_1 \times \cdots \times A_n$ が定義される．$A \times \cdots \times A$（n 個）を A^n と書く．

§2　　二項関係．写像または函数

0.2.1　　A, B が集合のとき，直積 $A \times B$ の部分集合 R を，$A \times B$ の**二項関係**と言う．とくに $A=B$ のとき，R を A 上の二項関係と言う．そのココロは，$(x, y) \in R$ のとき，x と y との間に R という関係があると見るのである．このとき，$x \underset{R}{\sim} y$ と書くことがある．

0.2.2　　f を $A \times B$ の二項関係とする．A の任意の元 x に対し，$(x, y) \in f$ なる B の元 y がちょうど一つ存在するとき，f を A から B への**写像**または**函数**と言う．この y を $f(x)$ と書き，f の x での値と言う．すなわち，函数 f のグラフをもって f の定義とするのである．A を f の**定義域**と言い，$\{f(x)\,;\, x \in A\}$ を $f(A)$ と書いて f の**値域**と言う．f が A から B への写像のとき，《$f: A \to B$》とか《$A \xrightarrow{f} B$》とか書く．また，$f(x)=y$ のとき，$f: x \mapsto y$ と書く．A の部分集合 C に対し，C の f による像 $\{f(x)\,;\, x \in C\}$ を $f(C)$ と書く．

0.2.3　　f を A から B への写像とする．A の任意の部分集合 C に対し，$f \cap (C \times B)$ は C から B への写像である．これを f の C への**制限**と言い，$f|C$ と書く．

0.2.4　　A から B への写像の全体を $\mathrm{Map}(A, B)$ または ${}^{A}B$ と書く．

0.2.5 f を A から B への写像とする.《$f(x)=f(y)$ なら $x=y$》が成立つとき, f を**単射** (injection) と言う. f の値域が B 全体であるとき, f を**上射** (surjection) と言う. 単射かつ上射のとき, f を**双射** (bijection) と言う.

§3 集合族. 積集合または直積. 選択公理

0.3.1 I, X を集合, x を I から X への写像とする. I の元 i の x による像を x_i と書く. 写像 x そのものよりも, x の値域 $\{x_i\,;\,i\in I\}$ に関心があるとき, x を**添字域 I をもつ X の元の族**と言い, $(x_i)_{i\in I}$ と書いたり $\{x_i\,;\,i\in I\}$ と書いたりする (この記号とはやや矛盾するが, 値域そのものと混同しない方がよい). $\boldsymbol{N}$ を添字域とする X の元の族を X の**点列**と言う.

とくに x_i がすべて集合であるとき, 族 $(x_i)_{i\in I}$ を**集合族**と言う.《$i\neq j$ なら $x_i\cap x_j=\varnothing$》が成立つとき, **無共分族**と言うことにする.

0.3.2 $(A_i)_{i\in I}$ を集合族とする. 少くとも一つの A_i に属する x の全体を集合族 $(A_i)_{i\in I}$ の**合併**と言い, $\bigcup_{i\in I} A_i$ と書く. あらゆる A_i に属する x の全体を集合族 $(A_i)_{i\in I}$ の**共通部分**または**共分**と言い, $\bigcap_{i\in I} A_i$ と書く.

0.3.3 集合 X に対し, その元の元であるものの全体を $\bigcup X$ と書く. すなわち,《$x\in\bigcup X \Longleftrightarrow x$ は X のある元 A に属する》. 普通は, X の元がすべて集合であるときに使う. このとき, X は X 自身を添字域とする集合族 $\{A\,;\,A\in X\}$ と考えられ, $\bigcup X$ はその合併 $\bigcup_{A\in X} A$ にほかならない.

0.3.4 $(A_i)_{i\in I}$ を集合族, $X=\bigcup_{i\in I} A_i$ とし, f を I から X への写像とする. 任意の $i\in I$ に対して $f(i)\in A_i$ が成立つとき, f を集合族 $\{A_i\,;\,i\in I\}$ の**選択函数**と言う. 選択函数の全体をこの集合族の**積集合**または**直積**と言い, $\prod_{i\in I} A_i$ と書く.

0.3.5 選択公理 どの A_i も空でなければ, 集合族 $\{A_i\,;\,i\in I\}$ の選択函数が少くとも一つ存在する.

本書全体を通じ，我々は選択公理を仮定する．これを直観的に言えば，集合族 $\{A_i\,;\,i\in I\}$ $(A_i\neq\emptyset)$ があるとき，その各集合 A_i から同時に一つずつ元を取りだすことができる，ということである．

選択公理により，どの A_i も空でなければ，直積 $\prod_{i\in I} A_i$ も空でない．

A_i がすべて同一の A なら，$\prod_{i\in I} A$ は ${}^I A$ と同じものである．

$I=\{1,2,\cdots,n\}$ なら，$\prod_{i\in I} A_i$ は $A_1\times\cdots\times A_n$ と同一視される．

§4　同値関係．分割．商集合

0.4.1　集合 X 上の二項関係 R がつぎの三条件をみたすとき，R を X 上の**同値関係**と言う：

a)　反射律．どの $x\in X$ に対しても $x\underset{R}{\sim}x$.

b)　対称律．$x\underset{R}{\sim}y$ なら $y\underset{R}{\sim}x$.

c)　推移律．$x\underset{R}{\sim}y$，$y\underset{R}{\sim}z$ なら $x\underset{R}{\sim}z$.

$x\underset{R}{\sim}y$ のとき，x と y とは R に関してたがいに**同値**であると言う．

0.4.2　R を X 上の同値関係とする．R に関してある元 a に同値な元の全体を，a を含む**同値類**と言う．同値類の全体を $\{A_i\,;\,i\in I\}$ とすると，これは X の部分集合の無共分族で，その合併は X である：

$$X=\bigcup_{i\in I} A_i.\qquad i\neq j \text{ なら } A_i\cap A_j=\emptyset.$$

この条件をみたすような X の部分集合の族を X の**分割**と言う．したがって，同値類の全体は X の分割である．

逆に X の分割 $\{A_i\,;\,i\in I\}$ が与えられたとき，$R=\bigcup_{i\in I}(A_i\times A_i)$ と置くと，R は X 上の同値関係であり，その同値類の全体は，はじめの分割と一致する．

0.4.3　X の同値関係 R による同値類の全体を X の R による**商集合**と言う．

§5 順　　序

0.5.1　集合 X 上の二項関係 R がつぎの三条件をみたすとき，R を X 上の**順序関係**または**順序**と言う．慣例に従って，《$(x, y)\in R$》のかわりに《$x\leqslant y$》と書く．

a)　反射律．どの $x\in X$ に対しても $x\leqslant x$.

b)　反対称律．$x\leqslant y$，$y\leqslant x$ なら $x=y$.

c)　推移律．$x\leqslant y$，$y\leqslant z$ なら $x\leqslant z$.

順序の与えられた集合を**順序集合**と言う．

$x\leqslant y$ のことを $y\geqslant x$ とも書く．

《$x\leqslant y$，$x\neq y$》のことを《$x<y$》と書く．これを順序と言うこともある．

0.5.2　$\leqslant$ を X 上の順序とする．X の元 a, b に対し，$a\leqslant x$，$x\leqslant b$ なる x の全体を，a, b を端点とする**閉区間**と言い，$[a, b]$ と書く．$a<x, x<b$ なる x の全体を**開区間**と言い，$]a, b[$ と書く．

0.5.3　$(X, \leqslant)$ を順序集合，A を X の部分集合とする．X の元 c が，A のあらゆる元 x に対して $x\leqslant c$ をみたすとき，c を A の**上界**と言う．下界も同様に定義される．上界〚下界〛が存在するとき，Aは上に〚下に〛**有界**であると言う．上にも下にも有界のとき，単に有界と言う．Aに属するAの上界〚下界〛(存在するとは限らないが，存在すれば唯一つ) を A の**最大元**〚**最小元**〛と言い，$\max A$〚$\min A$〛と書く．A の上界〚下界〛全部の集合に最小元〚最大元〛があるとき，それをAの**上限**〚**下限**〛と言い，$\sup A$〚$\inf A$〛と書く．A に最大元〚最小元〛が存在すればそれは A の上限〚下限〛である．

実数体 $\boldsymbol{R}$ の，上に有界な空でない部分集合は上限をもつ ($\boldsymbol{R}$ の完備性).

A の元 a が，A のどの元 x に対しても $a<x$ とならないとき，a を A の**極大元**と言う．極小元も同様に定義される．最大元は極大元である．

0.5.4　$\leqslant$ を X 上の順序とする．X の任意の元 a, b に対して，$a\leqslant b$, $b\leqslant a$ のどちらか一方が必ず成りたつとき，$\leqslant$ を X 上の**全順序**と言う．全順序集合の極大元は最大元である．

0.5.5　順序集合 X の任意の全順序部分集合が上に有界であるとき，X を**帰納順序集合**と言う．選択公理はつぎのツォルンの定理と同値である．

0.5.6　ツォルンの定理　空でない帰納順序集合は少くとも一つの極大元をもつ．

0.5.7　全順序集合 X の任意の空でない部分集合が最小元をもつとき，Xを**整列集合**と言い，その順序を**整列順序**と言う．選択公理はつぎの整列可能定理とも同値である．

0.5.8　整列可能定理　任意の集合上に整列順序が存在する．

§6　濃　　度

0.6.1　集合 A から集合 B への双射が存在するとき，A と B とは**等濃**であると言う．あらゆる集合にラベルを貼り，A と B とが等濃ならば同じラベル，等濃でなければ違うラベル，という風にすることができる．こうして貼られたラベルを集合 A の**濃度**と言い，原則として $|A|$ と書くことにする．一般にラベルを**基数**と言う．これらの定義に満足できない人は付録 I を見よ．

n 個の元から成る有限集合の濃度は n とする．とくに $|\emptyset|=0$.

有限集合の濃度すなわち自然数を**有限基数**，無限集合の濃度を**無限基数**と言う．

0.6.2　α, β を基数，$|A|=\alpha$，$|B|=\beta$ とする．A から B への単射が存在するとき，$\alpha\leqslant\beta$ と定める．これは A, B の取りかたに関係しない．基数の間の関係 $\leqslant$ は，**0.1.5** の順序の三条件をみたす．さらに全順序の条件もみたす．$\alpha\leqslant\beta$ であるためには，B から A への上射が存在することが必要十分である．

0.6.3　α, β を基数，$|A|=\alpha$，$|B|=\beta$ とする．$A\times B$ の濃度を $\alpha\beta$，${}^{A}B$ の濃度を β^{α} と定義する．また，$A\cap B=\emptyset$ なる A, B を取って，$A\cup B$ の濃

度を $\alpha+\beta$ と定義する．これらは自然数すなわち有限基数の演算と矛盾しない．冪集合 $\mathscr{P}(A)$ の濃度は $2^{|A|}$ である．

加法および乗法の交換法則 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$，$\alpha\beta=\beta\alpha$，結合法則 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$，$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$，分配法則 $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$，指数法則 $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\alpha^\gamma$，$(\alpha\beta)^\gamma=\alpha^\gamma\beta^\gamma$，$(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\gamma}$ が成立つ．

α,β がどちらも 0 でなく，少くとも一方が無限基数ならば，$\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ は，α,β のうちの大きい方に等しい．また，任意の基数に対して $\alpha<2^\alpha$ が成立つ．

基数から成る空でない集合には最小元が存在する．したがって，任意の基数 α に対し，α より大きな基数の中で最小のものがある．これを α の**つぎの基数**と言い，α^+ で表わす．任意の無限基数 α に対して $\alpha^+=2^\alpha$ であることを主張するのが一般連続体仮説である．しかし我々はこれに関知しない．

0.6.4 集合 A が無限集合であるためには，A の真部分集合 B で，A と等濃なものが存在することが必要十分である（カントル・デデキント式無限集合の定義）．

0.6.5 $\boldsymbol{N}$ の濃度を**可算濃度**または可算基数と言い，$\aleph_0$（アレフゼロ）または ω（オメガ）で表わす．本書では ω を使う．$\boldsymbol{N}$ と等濃な集合を**可算集合**と言う．無限集合には可算部分集合が存在する．ω は最小の無限基数である．任意の $n\in\boldsymbol{N}$，$n\neq0$ に対し，$\omega^n=\omega$．$\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Q}^n$ 等は可算集合だが，$\boldsymbol{R}$ は可算集合でない．

$\boldsymbol{R}$ の濃度を**連続濃度**と言う．これは 2^ω である．$(2^\omega)^\omega=2^{\omega\omega}=2^\omega$．$\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{C}^n,\boldsymbol{R}$ の区間等はすべて連続濃度をもつ．

$2^\omega=\omega^+$，すなわち連続濃度が可算基数のつぎの基数である，というのが本来の連続体仮説であるが，我々はこれに関知しない．

§7 論 理 記 号

この本の地の文はすべて普通の日本語で書く．ただ，略記号として，$\Rightarrow$ および $\Leftrightarrow$ を使う．すなわち，P,Q が命題であるとき，《$P\Rightarrow Q$》は《P な

ら Q》を表わし，《$P \Leftrightarrow Q$》は《$P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow P$》を表わす．

集合論の参考文献

集合論の本はたくさんある．その中から五つを選んで挙げておく．その順序は，上から下に行くにしたがって《素朴》から《公理的》になり，同時に段々難かしくなるということである．

1) 松村英之「集合論入門」朝倉書店（1966)．

2) P. R. Halmos「Naive set theory」Van Nostrand (1960), Springer (1970)，日本語訳「素朴集合論」（富川滋訳）ミネルヴァ書房（1975)．

3) 難波完爾「集合論」サイエンス社（1975)．

4) Takeuti G. & W. M. Zaring「Introduction to axiomatic set theory」Springer (1971).

5) Takeuti G. & W.M. Zaring「Axiomatic set theory」Springer(1972).

この本を読むためには 1) で十分である．2) を知っていればなお都合がよい．

第一章　超積と無限小解析

この章ではまず超フィルター，とくに自由超フィルターを定義してその存在を示す．つぎに，自由超フィルターを法とする超積の概念を導入し，実数体の超冪として超実数体を作る．これは実数体を真に含む非アルキメデス全順序体で，正負の無限大の元や0でない無限小の元をもつ．これを使って，ライプニッツ流の無限小解析がそのまま合理化される．ここは，論理の形式化を必要としない，まったく普通の数学である．また，ここに書いた程度のことが，論理を形式化しないですむことがらの限界でもある．

§1　超フィルター

フィルター

1.1.1　定義　I を空でない集合，$\mathscr{P}(I)$ を I の冪（べキ）集合，すなわち I の部分集合の全体とする．$\mathscr{P}(I)$ の空でない部分集合 $\mathscr{F}$ がつぎの三条件をみたすとき，$\mathscr{F}$ を I 上の**フィルター** (filter) と言う：

a)　$\emptyset \notin \mathscr{F}$

b)　$A \in \mathscr{F}$,　$A \subset B \Rightarrow B \in \mathscr{F}$

c)　$A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$.

1.1.2　例　1)　I のある一つの空でない部分集合を含む部分集合の全体．
2)　I が無限集合のとき，I の有限部分集合の補集合の全体．これを I 上の**フレシェ・フィルター** (Fréchet filter) と言い，$\mathscr{F}_0(I)$ と書く．
3)　I が位相空間のとき，I の一点 a の近傍の全体．

1.1.3　定義　1)　$\mathscr{S}$ を $\mathscr{P}(I)$ の空でない部分集合とする．$\mathscr{S}$ の任意の有限個の元 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ が空でないとき，$\mathscr{S}$

は**有限交差性**をもつ，または**有限交差的**であると言う．

2)　$\mathscr{P}(I)$ の空でない部分集合 $\mathscr{B}$ が**フィルター基底**であるとは，

a)　$\varnothing \notin \mathscr{B}$

b)　$A, B \in \mathscr{B}$ なら，$A \cap B$ に含まれる $\mathscr{B}$ の元 C が存在する．

の二条件をみたすことである．

フィルター基底は有限交差的である．フィルターはフィルター基底である．

1.1.4　命題　　1)　$\mathscr{B}$ がフィルター基底のとき，少くとも一つの $\mathscr{B}$ の元を含むような I の部分集合の全体 $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ はフィルターである．これは $\mathscr{B}$ を含む最小のフィルターである．$\mathscr{F}(\mathscr{B})$ を $\mathscr{B}$ の**生成する**フィルターと言う．

2)　$\mathscr{S}$ が有限交差的のとき，$\mathscr{S}$ の元の有限共分の全体

$$\mathscr{B}(\mathscr{S})=\{A_1\cap\cdots\cap A_n\ ;\ A_1, \cdots, A_n\in\mathscr{S}\}$$

はフィルター基底である．$\mathscr{F}(\mathscr{B}(\mathscr{S}))$ を $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ と書き，$\mathscr{S}$ の**生成する**フィルターと言う．

証明はどちらもやさしい．■

超フィルター

1.1.5　定義　　I 上のフィルター $\mathscr{F}$ が包含関係に関して極大のとき，すなわち $\mathscr{F}\subsetneqq\mathscr{G}$ なるフィルターが存在しないとき，$\mathscr{F}$ を I 上の**超フィルター** (ultrafilter) と言う．

1.1.6　定義　　I の一点 a を含む部分集合の全体は超フィルターである．これらを**単項超フィルター** (principal ultrafilter)，これ以外の超フィルターを**非単項超フィルター** (non-principal ultrafilter) と言う．

実際に目に見える形に構成できるのは，単項超フィルターに限る．I が無限集合の場合，非単項超フィルターは，選択公理に依拠するつぎの定理によって存在が保証されるにすぎない．しかし，役に立つのは非単項超フィルターである．

1.1.7　定理　　$\mathscr{P}(I)$ の部分集合 $\mathscr{S}$ が有限交差的なら，$\mathscr{S}$ を含む超フィルターが存在する．とくに，任意のフィルターを含む超フィルターが存在す

る.

証明　$\mathscr{S}$ を含むフィルターの全体を $\boldsymbol{F}$ とする. $\mathscr{S}$ の生成するフィルター $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ は $\boldsymbol{F}$ の元だから $\boldsymbol{F}$ は空でない. $\boldsymbol{F}$ は包含関係に関して帰納順序集合 (0.5.5参照) である. 実際, $\boldsymbol{F}$ の空でない部分集合 $\boldsymbol{G}$ が, 同じ順序に関して全順序集合であるとしよう. $\mathscr{G}=\bigcup \boldsymbol{G}=\bigcup_{\mathscr{F}\in \boldsymbol{G}} \mathscr{F}$ とおく. $\mathscr{G}$ はフィルターである. なぜなら, まず $\mathscr{G}$ は空でない. つぎに定義の三条件を調べる. a) 空集合はどの $\mathscr{F}\in\boldsymbol{G}$ にも属さないから $\emptyset\notin\mathscr{G}$. b) $A\in\mathscr{G}$, $A\subset B$ とする. A はある $\mathscr{F}\in\boldsymbol{G}$ に属する. $\mathscr{F}$ はフィルターだから $B\in\mathscr{F}$. よって $B\in\mathscr{G}$. c) $A, B\in\mathscr{G}$ なら $A\in\mathscr{F}_1$, $B\in\mathscr{F}_2$ なる $\boldsymbol{G}$ の元 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ が存在する. $\boldsymbol{G}$ は全順序集合だから $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$ または $\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}_1$. $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$ なら A も B も $\mathscr{F}_2$ に属する. $\mathscr{F}_2$ はフィルターだから $A\cap B\in\mathscr{F}_2$, よって $A\cap B\in\mathscr{G}$. $\mathscr{F}_1\supset\mathscr{F}_2$ の場合も同様. $\mathscr{G}$ はあらゆる $\mathscr{F}\in\boldsymbol{G}$ を含むから $\boldsymbol{G}$ の上界である. よって $\boldsymbol{F}$ が帰納順序集合であることが分った. したがって, ツォルンの定理 **0.5.6** により, $\boldsymbol{F}$ は極大元 $\mathscr{F}$ を少くとも一つもつ. $\mathscr{F}$ は超フィルターで, $\mathscr{S}$ を含む. ∎

1.1.8　命題　I 上のフィルター $\mathscr{F}$ に関するつぎの四条件は同値である:

a)　$\mathscr{F}$ は超フィルターである.

b)　I の任意の部分集合 A に対し, $A\in\mathscr{F}$ または $I-A\in\mathscr{F}$.

c)　$A, B\subset I$, $A\cup B\in\mathscr{F}$ なら, $A\in\mathscr{F}$ または $B\in\mathscr{F}$.

d)　$A_1, \cdots, A_n\subset I$, $A_1\cup\cdots\cup A_n\in\mathscr{F}$ なら, 少くとも一つの A_i が $\mathscr{F}$ に属する.

証明　b) $\Rightarrow$ a)　$\mathscr{F}$ が超フィルターでなければ, $\mathscr{F}\subsetneqq\mathscr{G}$ なる超フィルター $\mathscr{G}$ が存在する. $A\notin\mathscr{F}$, $A\in\mathscr{G}$ なる A を取ると, 仮定により $I-A\in\mathscr{F}$. したがって $I-A\in\mathscr{G}$. よって $\emptyset=A\cap(I-A)\in\mathscr{G}$ となり矛盾.

a) $\Rightarrow$ b)　$A\notin\mathscr{F}$ とし, $I-A=A'$ と書く. 任意の $V\in\mathscr{F}$ に対し, $V\not\subset A$. よって $V\cap A'\neq\emptyset$. したがって $\mathscr{B}=\{V\cap A'\,;\,V\in\mathscr{F}\}$ はフィルター基底である. $\mathscr{B}$ の生成するフィルターを $\mathscr{G}$ とすると, 任意の $V\in\mathscr{F}$ に対し, $V\cap A'\in\mathscr{B}\subset\mathscr{G}$, よって $V\in\mathscr{G}$, すなわち $\mathscr{F}\subset\mathscr{G}$. $\mathscr{F}$ は超フィルターだから $\mathscr{F}=\mathscr{G}$. $A'=I\cap A'\in\mathscr{B}\subset\mathscr{G}=\mathscr{F}$.

b) $\Rightarrow$ c)　$A\notin\mathscr{F}$ とする.　$A\cup B\in\mathscr{F}$ だから $A'\cap B'=(A\cup B)'\notin\mathscr{F}$. 一

方，$A'\in\mathscr{F}$ だから $B'\notin\mathscr{F}$（もし $B'\in\mathscr{F}$ なら $A'\cap B'\in\mathscr{F}$ となる）．条件によって $B\in\mathscr{F}$.

c) $\Rightarrow$ b) および c) $\Leftrightarrow$ d) はやさしいから省略する．∎

1.1.9　命題　無限集合 I 上の超フィルター $\mathscr{F}$ に関するつぎの三条件は同値である．

a) $\mathscr{F}$ は単項でない．

b) $\mathscr{F}$ はフレシェ・フィルター $\mathscr{F}_0(I)$ を含む．

c) $\mathscr{F}$ は有限集合を含まない．

証明　a) $\Rightarrow$ c) $\{a_1, \cdots, a_n\}\in\mathscr{F}$ なら，前命題 d) により，ある $\{a_i\}$ が $\mathscr{F}$ に属するから $\mathscr{F}$ は単項である．

c) $\Rightarrow$ b) 前命題 b) による．

b) $\Rightarrow$ a) $\mathscr{F}$ が単項なら，I の点 a で，$\{a\}\in\mathscr{F}$ なるものがある．$A=I-\{a\}$ とすると，$A\in\mathscr{F}_0(I)$ だが，$\mathscr{F}$ はフィルターだから $A\notin\mathscr{F}$. ∎

1.1.10　系　I の任意の無限部分集合 A を含む非単項超フィルターが存在する．とくに，任意の無限集合 I 上に非単項超フィルターが存在する．

証明　$\mathscr{B}=\{V\cap A\ ;\ V\in\mathscr{F}_0(I)\}$ とする．$I-V$ は有限だから $A\not\subset I-V$. よって $V\cap A\neq\emptyset$. また，$V_1\cap A$, $V_2\cap A\in\mathscr{B}$ なら，$(V_1\cap A)\cap(V_2\cap A)=(V_1\cap V_2)\cap A\in\mathscr{B}$. よって $\mathscr{B}$ はフィルター基底である．$\mathscr{B}$ を含む超フィルターは $\mathscr{F}_0(I)$ を含むから，前命題 b) によって単項でない．∎

自由超フィルター

1.1.11　定義　I を無限集合，$\mathscr{F}$ を I 上の超フィルターとする．$\mathscr{F}$ に属する可算個の元 $A_0, A_1, \cdots$ で，$\bigcap_{n\in N} A_n\notin\mathscr{F}$ なるものが存在するとき，$\mathscr{F}$ を**自由超フィルター** (free ultrafilter) と言う．

注意　これは慣用と著るしく異なる用法である．普通，この条件をみたす超フィルターは ω-incomplete（訳せば可算級非完備）と呼ばれ，《自由》は《非単項》と同義である．我々が使うのはもっぱらこの種の超フィルターであるのに，この名称は長すぎるし，否定辞を含んでいるのも気に入らない．

それに，非単項で自由でない超フィルターは存在するかどうか分っていない†．こういう理由であえて慣用を破った．ほかの本や論文を見るときは注意を要する．

1.1.12 命題　無限集合 I 上の超フィルター $\mathscr{F}$ に関するつぎの三条件は同値である．

a）$\mathscr{F}$ は自由超フィルターである．

b）$\mathscr{F}$ に属する可算個の元 $J_0, J_1, \cdots$ で，$J_n \supset J_{n+1}$，$\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}} J_n = \varnothing$ なるものが存在する．

c）I の可算個の類への分割 $\{I_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ で，どの I_n も $\mathscr{F}$ に属さないものが存在する．

証明　a）⇒ b）　$\{A_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}\subset\mathscr{F}$，$\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}} A_n \notin \mathscr{F}$ とする．$\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}} A_n$ の補集合を B とすれば $B\in\mathscr{F}$．$n\in\boldsymbol{N}$ に対して $J_n = A_0\cap\cdots\cap A_n\cap B$ とすると $J_n\in\mathscr{F}$，$J_n\supset J_{n+1}$，$\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}} J_n = \left(\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}} A_n\right)\cap B = \varnothing$．

b）⇒ c）　$I_0 = J_0'$（J_0 の補集合，以下同様），$I_n = J_n' - J_{n-1}'$（$n\geqq 1$）とおくと $I_n\notin\mathscr{F}$．$n<m$ のとき，$I_n\cap I_m \subset J_n'\cap(J_m' - J_{m-1}') = \varnothing$．$I$ の任意の元 x に対し，$x\notin J_n$ なる最小の n をとると，$x\in J_n' - J_{n-1}' = I_n$．したがって，$\{I_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ は I の分割である．

c）⇒ a）　$A_n = I_n'$ とすれば $A_n\in\mathscr{F}$，$\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} I_n\right)' = \varnothing$．∎

1.1.13 命題　自由超フィルターは単項でない．とくに I が可算集合なら逆も成立つ．

証明　$\mathscr{F}$ が単項なら，$\mathscr{F}$ の元はどれも I のある点 a を含む．したがって，前命題の条件 b）をみたす $\{J_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ は存在しない．もし $I=\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ で，$\mathscr{F}$ が単項でなければ，$I_n = \{a_n\}$ とすれば前命題の条件 c）をみたす．∎

1.1.14 定理　無限集合 I の任意の無限部分集合を含む自由超フィルターが存在する．とくに，I 上に自由超フィルターが存在する．

証明　A が I の無限部分集合なら，A に含まれる可算集合 B が存在す

† これはいわゆる可測基数の存在問題である．もしゲーデルの $V=L$ を仮定すれば可測基数は存在しない．

る．Bを含む部分集合の全体$\mathscr{G}$はフィルターである．$\mathscr{S}=\mathscr{G}\cup\mathscr{F}_0(I)$とすると，$\mathscr{S}$は有限交差的である．実際，$C_1, \cdots, C_n \in \mathscr{S}$に対し，$\mathscr{G}$に属する$C_i$全部の共通部分を$C$，$\mathscr{F}_0(I)$に属する$C_i$全部の共通部分を$D$とすれば，$C_1\cap C_2\cap\cdots\cap C_n=C\cap D$，$C\in\mathscr{G}$，$D\in\mathscr{F}_0(I)$．$I-D$は有限，$C$は無限（$B\subset C$）だから，$C\not\subset I-D$，すなわち$C\cap D\neq\emptyset$．よって$\mathscr{S}$は有限交差的である．$\mathscr{S}$を含む超フィルター$\mathscr{F}$が存在する．$\mathscr{F}\supset\mathscr{F}_0(I)$だから$\mathscr{F}$は単項でなく，したがって有限集合を含まない（命題1.1.9）．$B=\{b_m ; m\in \boldsymbol{N}\}$とし，$J_n=\{b_m ; m\in\boldsymbol{N},\ m\geqslant n\}$とすれば$\{J_n ; n\in\boldsymbol{N}\}$は命題1.1.12の条件 b)をみたす．したがって$\mathscr{F}$はAを含む自由超フィルターである．▮

§2　超　　積

これからこの章の終りまで，Iは無限集合，$\mathscr{F}$はI上の自由超フィルター，$\{I_n ; n\in\boldsymbol{N}\}$は$I$の可算分割で$I_n\notin\mathscr{F}$なるものとする．実際には，$I=\boldsymbol{N}$，$I_n=\{n\}$と思っても差支えない．むしろその方が分りやすい．ただ，あとの議論との続き具合をよくするために一般的な形にしておくだけである．

超　　積

1.2.1　定義　　空でない集合の族$\{X(i) ; i\in I\}$の直積$\prod_{i\in I}X(i)$（選択公理によって空でない）の二元$\alpha=(\alpha(i))$，$\beta=(\beta(i))$に対し，$\{i\in I ; \alpha(i)=\beta(i)\}\in\mathscr{F}$のとき，$\alpha\underset{\mathscr{F}}{\sim}\beta$として関係$\underset{\mathscr{F}}{\sim}$を定める．これは同値関係である．$\prod_{i\in I}X(i)$の$\underset{\mathscr{F}}{\sim}$による商集合を，集合族$\{X(i) ; i\in I\}$の，$\mathscr{F}$を法とする**超積**（ultraproduct）と言い，$\prod_{\mathscr{F}}X(i)$と書く．直積の元$(\alpha(i))$の属する類（超積の元）を$[\alpha(i)]$と略記する．ときには括弧の繁雑さを避けるために$[\alpha_i]$と書くこともある．

今後集合族の超積を考える場合，一々断わらなくても各集合は空集合ではないとする．

$X(i)$がすべて同一の集合Xのとき，その超積をXの$\mathscr{F}$を法とする**超冪**（ultrapower）と言う．$\mathscr{F}$を明示する必要のないときには，これを$^*X$で表わす．Xの元aに対し，すべての$i\in I$に対して$\alpha(i)=a$として定まる$^*X$の

元を $^*a$ と書く．a と $^*a$ とを同一視することにより，X を $^*X$ の部分集合とみなすことができる．こうしたとき，X の元を $^*X$ の**標準元** (standard element)，$^*X-X$ の元を**超準元** (non-standard element) と言う．

1.2.2　命題　$^*X=X$ となるのは X が有限集合の場合である．

証明　1°　$X=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ のとき，$^*X$ の任意の元 α に対し，$\alpha(i)=a_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ となる i の全体を A_k とすれば $I=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$．命題 **1.1.8** d) により，少くとも一つの A_k は $\mathscr{F}$ に属する．超積の定義によって $\alpha={}^*a_k=a_k$ となる．

2°　X が無限集合なら，可算部分集合 $A=\{a_0, a_1, \cdots\}$ が存在する．I から A への写像 α を，$i\in I_n$ に対して $\alpha(i)=a_n$ として定める．$\alpha=[\alpha(i)]$ と置くと，任意の n に対し，$\{i\in I\,;\,\alpha(i)=a_n\}=I_n\notin\mathscr{F}$．よって $\alpha\neq a_n$．一方，$b\notin A$ ならあらゆる i に対して $\alpha(i)\neq b$．よって $\alpha\neq b$．したがって $\alpha\notin X$．∎

1.2.3　命題　$\varnothing\neq Y(i)\subset X(i)$ $(i\in I)$ のとき，自然に $\prod_{\mathscr{F}} Y_i\subset\prod_{\mathscr{F}} X_i$ とみなすことができる．$A(i)$，$B(i)$ を $X(i)$ の空でない部分集合とする．

1)　$\prod_{\mathscr{F}} A(i)\subset\prod_{\mathscr{F}} B(i)$ であるためには，$\{i\in I\,;\,A(i)\subset B(i)\}\in\mathscr{F}$ であることが必要十分である．

2)　$\prod_{\mathscr{F}}(A(i)\cup B(i))=\prod_{\mathscr{F}} A(i)\cup\prod_{\mathscr{F}} B(i)$，$\prod_{\mathscr{F}}(A(i)\cap B(i))=\prod_{\mathscr{F}} A(i)\cap\prod_{\mathscr{F}} B(i)$．ただし，$A(i)\cap B(i)\neq\varnothing$ を仮定する．

3)　$\prod_{\mathscr{F}}(X(i)\times Y(i))=\prod_{\mathscr{F}} X(i)\times\prod_{\mathscr{F}} Y(i)$ とみなすことができる．ただし，左辺の元 $[(\alpha(i), \beta(i))]$ と右辺の元 $([\alpha(i)], [\beta(i)])$ とを同一視する．

4)　各 i に対して $X(i)$ から $Y(i)$ への写像 f_i があるとき，$\prod_{\mathscr{F}} X(i)$ から $\prod_{\mathscr{F}} Y(i)$ への写像 $^*f$ が，$^*f([\alpha(i)])=[f_i(\alpha(i))]$ によって定まる．

証明　どれも機械的であるが，ものごとに慣れるために一応証明する．

1)　$J=\{i\in I\,;\,A(i)\subset B(i)\}\in\mathscr{F}$ とし，$\prod_{\mathscr{F}} A(i)$ の元 $\alpha=[\alpha(i)]$，$\alpha(i)\in A(i)$ を取る．$i\in J$ に対して $\beta(i)=\alpha(i)$ と置き，$i\notin J$ に対しては $B(i)$ の勝手な元 $\beta(i)$ を取る（選択公理）．$\beta=[\beta(i)]$ とすると $\beta\in\prod_{\mathscr{F}} B(i)$ となる．$i\in J$ なら $\alpha(i)=\beta(i)$ だから $\alpha=\beta$．よって $\alpha\in\prod_{\mathscr{F}}\beta(i)$．

つぎに $J\notin\mathscr{F}$ とする．$I-J=\{i\in I\,;\,A(i)\not\subset B(i)\}\in\mathscr{F}$．$i\in I-J$ に対して

$A(i)-B(i)$ の元 $\alpha(i)$ を取り（選択公理），$i\in J$ に対しては $A(i)$ の勝手な元 $\alpha(i)$ を取る（選択公理）．$\alpha=[\alpha(i)]$ とすれば $\alpha\in\prod_{\mathscr{F}}A(i)$，$\alpha\notin\prod_{\mathscr{F}}B(i)$．

2)（イ） 明らかに $\prod_{\mathscr{F}}A(i)\cup\prod_{\mathscr{F}}B(i)\subset\prod_{\mathscr{F}}(A(i)\cup B(i))$．右辺の元 $\gamma=[\gamma(i)]$ を取ると，$\gamma(i)\in A(i)\cup B(i)$．$J=\{i\,;\gamma(i)\in A(i)\}$，$K=\{i\,;\gamma(i)\in B(i)\}$ と置くと，$J\cup K=I$．よって，$J\in\mathscr{F}$ または $K\in\mathscr{F}$．したがって $\gamma\in\prod_{\mathscr{F}}A(i)$ または $\gamma\in\prod_{\mathscr{F}}B(i)$．

（ロ） 明らかに $\prod_{\mathscr{F}}(A(i)\cap B(i))\subset\prod_{\mathscr{F}}A(i)\cap\prod_{\mathscr{F}}B(i)$．右辺の元 γ を取ると，条件により，$\gamma=[\alpha(i)]$，$\alpha(i)\in A(i)$ かつ $\gamma=[\beta(i)]$，$\beta(i)\in B(i)$．$J=\{i\in I\,;\alpha(i)=\beta(i)\}\in\mathscr{F}$．$i\in J$ に対して $\gamma(i)=\alpha(i)=\beta(i)$，$i\notin J$ に対して $A(i)\cap B(i)$ の勝手な元 $\gamma(i)$ を取ると，$\gamma=[\gamma(i)]\in\prod_{\mathscr{F}}(A(i)\cap B(i))$．

3) 略

4) $\prod_{\mathscr{F}}X(i)\ni\alpha=[\alpha(i)]=[\alpha'(i)]$ とすると，$J=\{i\,;\alpha(i)=\alpha'(i)\}\in\mathscr{F}$．$i\in J$ なら $f_i(\alpha(i))=f_i(\alpha'(i))$．よって $[f_i(\alpha(i))]=[f_i(\alpha'(i))]$．∎

順　序　構　造

1.2.4　命題　各 $X(i)$ に順序 $\overset{i}{\leqslant}$ があるとき，超積 $\prod_{\mathscr{F}}X(i)$ の元 $\alpha=[\alpha(i)]$，$\beta=[\beta(i)]$ に対し，$\{i\in I\,;\alpha(i)\overset{i}{\leqslant}\beta(i)\}\in\mathscr{F}$ のとき $\alpha\leqslant\beta$ として関係 $\leqslant$ を定めると，$\leqslant$ は超積上の順序である．とくに各 $\overset{i}{\leqslant}$ が全順序なら $\leqslant$ も全順序である．

証明　1° 関係 $\leqslant$ は α,β の代表の取りかたによらずに決まる（これを**《うまく定義される》**ということにする）．実際，$\alpha=[\alpha(i)]=[\alpha'(i)]$，$\beta=[\beta(i)]=[\beta'(i)]$ のとき，$A=\{i\,;\alpha(i)=\alpha'(i)\}$，$B=\{i\,;\beta(i)=\beta'(i)\}$ はともに $\mathscr{F}$ に属する．$\{i\,;\alpha'(i)\overset{i}{\leqslant}\beta'(i)\}\supset A\cap B\cap\{i\,;\alpha(i)\overset{i}{\leqslant}\beta(i)\}$ だからうまく定義される．

2° $\leqslant$ は順序である．たとえば，$\alpha\leqslant\beta$，$\beta\leqslant\gamma$ なら，$A=\{i\,;\alpha(i)\overset{i}{\leqq}\beta(i)\}\in\mathscr{F}$，$B=\{i\,;\beta(i)\overset{i}{\leqslant}\gamma(i)\}\in\mathscr{F}$，$C=\{i\,;\alpha(i)\overset{i}{\leqslant}\gamma(i)\}\supset A\cap B$．よって $C\in\mathscr{F}$．

3° 各 $\overset{i}{\leqslant}$ が全順序とする．超積の任意の二元 $\alpha=[\alpha(i)]$，$\beta=[\beta(i)]$ に対し，$A=\{i\,;\alpha(i)\overset{i}{\leqslant}\beta(i)\}$，$B=\{i\,;\beta(i)\overset{i}{\leqslant}\alpha(i)\}$ とすれば $A\cup B=I$．命題 1.1.8 c) により，$A\in\mathscr{F}$ または $B\in\mathscr{F}$，すなわち $\alpha\leqslant\beta$ または $\beta\leqslant\alpha$．∎

注意　あらゆる $X(i)$ に順序がなくても，$X(i)$ に順序があるような i

の全体が $\mathscr{F}$ に属すれば超積には順序が入る．また，あらゆる $X(i)$ が全順序集合でなくても，$X(i)$ が全順序集合であるような i の全体が $\mathscr{F}$ に属すれば超積は全順序集合になる．証明の修正はやさしい．

1.2.5 例　実数体 $\boldsymbol{R}$ の超冪 $^*\boldsymbol{R}$ は全順序集合である．命題 1.2.2 により，$\boldsymbol{R}\subsetneqq {}^*\boldsymbol{R}$．$^*\boldsymbol{R}$ の元を**超実数**と言う．α を超実数とする．ある実数 a があって，$-a\leqslant\alpha\leqslant a$ となるとき α を**有限超実数**，どんな実数 a に対しても $a\leqslant\alpha$ のとき α を正の**無限大超実数**，どんな実数 a に対しても $\alpha\leqslant a$ のとき α を負の無限大超実数と言う．また，任意の $e\in\boldsymbol{R}$，$e>0$ に対して $-e<\alpha<e$ となるとき，α を**無限小超実数**と言う（これらの概念がことばの遊びでないことは次節で明らかにする）．$i\in I_n$ に対して $\alpha(i)=n$ とおけば $[\alpha(i)]$ は正の無限大，$\alpha(i)=\dfrac{1}{n+1}$ とおけば $[\alpha(i)]$ は無限小であって 0 ではない．

とくに，$^*\boldsymbol{Z}\subset {}^*\boldsymbol{R}$ であるが，有限超整数は普通の整数である．実際，α が有限超整数なら，$-m\leqslant\alpha\leqslant m$ となる普通の整数 m が存在する．$-m\leqslant\alpha(i)\leqslant m$ となる i の全体を A とすると，A は $\mathscr{F}$ に属する．$-m\leqslant n\leqslant m$ なる $n\in\boldsymbol{Z}$ に対し，$A_n=\{i\,;\,\alpha(i)=n\}$ とおくと，$A=\bigcup_{n=-m}^{m}A_n$．よって，少なくとも（実はちょうど）一つの n に対して $A_n\in\mathscr{F}$ となり，$\alpha=n$ となる．

$^*\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N}$ を $\boldsymbol{N}'$ と書き，その元を**無限大超自然数**と言う．

代 数 構 造

1.2.6　各 $X(i)$ が内算法 $\overset{i}{\circ}$ をもつとき，超積の元 $\alpha=[\alpha(i)]$，$\beta=[\beta(i)]$ に対して $\alpha\circ\beta=[\alpha(i)\overset{i}{\circ}\beta(i)]$ と定義する（うまく定義される）．また，各 $X(i)$ が外算法 $\varphi_i:E(i)\times X(i)\to X(i)$ をもつとき，$\varepsilon=[\varepsilon(i)]\in\prod_{\mathscr{F}}E(i)$ および $\alpha=[\alpha(i)]\in\prod_{\mathscr{F}}X(i)$ に対して $\varphi(\varepsilon,\alpha)=[\varphi_i(\varepsilon(i),\alpha(i))]$ とおくと，φ は $\prod_{\mathscr{F}}E(i)$ を作用域とする $\prod_{\mathscr{F}}X(i)$ の外算法である．とくに $E(i)$ がすべて同一の E なら，$E\subset {}^*E$ だから，$\prod_{\mathscr{F}}X(i)$ は E を作用域とする外算法も持つ．

1.2.7 命題　各 $X(i)$ の算法（二つ以上あってもよい）が結合的だったり可換だったり分配的だったり，また単位元を持ったり逆元を持ったりしていれば，超積の算法も同じ性質をもつ．とくに各 $X(i)$ が群や体であれば，

超積も群や体である.

さらに，各 $X(i)$ が順序 $\overset{i}{\leqslant}$ をもち，それが算法と適当な意味で同調(compatible) していれば，超積上の順序も，同じ意味で算法と同調する．とくに $^*\boldsymbol{R}$ は順序体（これは実は全順序体を意味する）である．これを**超実数体**（$\mathscr{F}$ によることに注意）と言う.

証明はまったく機械的でつまらないから省く.

1.2.8　例　　1)　超実数体 $^*\boldsymbol{R}$ で，α が（正負の）無限大であるのは，α^{-1} が無限小のときである．$^*\boldsymbol{R}$ は非アルキメデス体である．実際，α を正の無限小超実数とすると，どんな（普通の）自然数 n をとっても $n\alpha$ は依然として無限小である.

2)　I を素数の全体とし，$\boldsymbol{F}_p$ を標数 p の素体（p 個の元から成る）とする．上の命題により，超積 $\prod_{\mathscr{F}}\boldsymbol{F}_p$ は体であるが，これは標数 0 である．実際，どんな自然数 n に対しても $\{p\in I\,;\,p>n\}$ は $\mathscr{F}_0(I)$ に，したがって $\mathscr{F}$ に属するから，$n\cdot 1\neq 0$．もう少し詳しく説明する．$\boldsymbol{F}_p$ の乗法群の単位元を $1(p)$ と書き，自然数 n に対して $1(p)+\cdots+1(p)$（n 個の和）を $n\cdot 1(p)$ と書く．$1=[1(p)]$ は体 $\prod_{\mathscr{F}}\boldsymbol{F}(p)$ の乗法群の単位元である．任意の自然数 n に対し，$J_n=\{p\in I\,;\,p>n\}$ は $\mathscr{F}_0(I)$ に，したがって $\mathscr{F}$ に属する．$p\in J_n$ なら $n\cdot 1(p)\neq 0$．すなわち，$(n\cdot 1)(p)=n\cdot 1(p)\neq 0$．よって $n\cdot 1\neq 0$.

この体の性質は $\mathscr{F}$ の取りかたに大いによる．$A=\{2\}\cup\{p\in I\,;\,p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)\}$，$B=\{p\in I\,;\,p\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)\}$ はともに無限集合だから，定理 **1.1.14** により，それぞれを含む自由超フィルター $\mathscr{F},\mathscr{G}$ が存在する．$p\in A$ なら，方程式 $x^2+1=0$ は $\boldsymbol{F}_p$ で解をもつ．その解の一つを a_p とする．$p\in A$ のとき，$\alpha(p)=a_p$，$p\notin A$ のとき $\alpha(p)=0$ として $\alpha=[\alpha(p)]$ を定めると，α は超積 $\prod_{\mathscr{F}}\boldsymbol{F}_p$ の元で，$x^2+1=0$ の解である．一方，$p\in B$ なら，方程式 $x^2+1=0$ は $\boldsymbol{F}_p$ で解けない．したがって超積 $\prod_{\mathscr{G}}\boldsymbol{F}_p$ でも解けない.

§3　無 限 小 解 析

超実数体の構造

1.3.1　定義　　二つの超実数 α,β の差 $\alpha-\beta$ が無限小のとき，α と β と

は**無限に近い**と言い，$\alpha \doteqdot \beta$ と書く．関係 $\doteqdot$ は同値関係である．実数 a に無限に近い超実数の全体を a の**単子**または**モナド** (monad) と言い，$\mu(a)$ と書く．

$$\mu(a)=\bigcap_{e\in \boldsymbol{R}, e>0} {}^*[a-e, a+e]=\bigcap_{n\in \boldsymbol{N}-\{0\}} {}^*\left[a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}\right]$$

(区間の記号 $^*[\quad,\quad]$ は $^*\boldsymbol{R}$ における区間を表わす).

$\alpha\in {}^*\boldsymbol{R}$, $a\in\boldsymbol{R}$, $\alpha\in\mu(a)$ のとき，a を α の**標準部分**と言い，$\mathrm{st}(\alpha)$と書く．

1.3.2 定理　1) 有限超実数の全体 $\boldsymbol{A}$ は $^*\boldsymbol{R}$ の部分環である．$\boldsymbol{A}$ の任意の元はある実数の単子に属する．

2) $\boldsymbol{a}=\mu(0)$ は $\boldsymbol{A}$ の唯一つの極大イデアルであり，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{a}=\{0\}$, したがって $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{a}\cong\boldsymbol{R}$ (体として).

証明　1) $\boldsymbol{A}$ が $^*\boldsymbol{R}$ の部分環であることは明らか．$\alpha\in\boldsymbol{A}$ に対し，$D_1=\{a\in\boldsymbol{R}\,;\,a\leqslant\alpha\}$, $D_2=\{a\in\boldsymbol{R}\,;\,\alpha<a\}$ と置くと，(D_1, D_2) はデデキントの切断である．すなわち，D_1 も D_2 も空でなく，$D_1\cap D_2=\varnothing$, $D_1\cup D_2=\boldsymbol{R}$ であり，$x\in D_1$, $y\in D_2$ なら $x<y$ である．よってそれは実数 a を定める．α は $\mu(a)$ に属する．実際，もし実数 $e>0$ が存在して $|\alpha-a|\geqslant e$ が成立つとすると，$\alpha>a+e$ であっても $\alpha<a-e$ であっても a の定義に反する．

2) $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{A}$ のイデアルであることは明らか．$\boldsymbol{b}$ がイデアルで，無限小でない有限超実数 α を含むとすると，$\alpha^{-1}\in\boldsymbol{A}$ だから $1\in\boldsymbol{b}$ となり，$\boldsymbol{b}$ はイデアルだから $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}$ となってしまう．よって $\boldsymbol{b}\subset\boldsymbol{a}$, すなわち $\boldsymbol{a}$ は最大イデアルである．$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{a}$ は 1) で示した．$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{a}=\{0\}$ は明らかである．■

注意　今後混乱を避けるため，普通の実数やそこを走る変数はローマ字で，超実数を走り得る変数や定数はなるべくギリシャ文字で書くようにする．もちろん完全にはできない．

極限および連続性

これから述べることはあくまでも例示であり，体系的叙述をめざすものではない．

1.3.3 定理　実数列 $\{a(n)\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ は $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像だから，命

題 **1.2.3** の 4) により，$^*\boldsymbol{N}$ から $^*\boldsymbol{R}$ への写像 $^*a$ が定まる．

1)　数列 $a(n)$ が実数 b に収束するためには，任意の無限大超自然数 ν に対して $^*a(\nu)\fallingdotseq b$ となることが必要十分である．

2)　数列 $a(n)$ がコーシー列（すなわち収束列）であるためには，任意の無限大超自然数 ν,μ に対して $^*a(\nu)\fallingdotseq {}^*a(\mu)$ となることが必要十分である．

証明　　1a)　$\lim_{n\to\infty} a(n)=b$ なら，任意の実数 $e>0$ に対し，自然数 n_0 が存在し，$n\geqslant n_0$ なる任意の n に対して $|a(n)-b|\leqslant e$ となる．$\nu\in \boldsymbol{N}'={}^*\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N}$ なら $\nu\geqslant n_0$ だから，$\nu=[\nu(i)]$ なら $\{i\,;\,\nu(i)\geqslant n_0\}\in\mathscr{F}$．よって $\{i\,;\,|a(\nu(i))-b|\leqslant e\}\in\mathscr{F}$．したがって $|^*a(\nu)-b|\leqslant e$．e は任意だから $^*a(\nu)\fallingdotseq b$.

1b)　$a(n)$ が b に収束しなければ，ある実数 $e>0$ を取ると，任意の n に対し，$m\geqslant n$, $|a(m)-b|>e$ なる m が存在する．その一つ（たとえば最小のもの）を $m(n)$ と書く．I の任意の元 i は唯一つの I_n に属するから，このような i に対して $\nu(i)=m(n)$ とおいて $\nu=[\nu(i)]\in{}^*\boldsymbol{N}$ を定める．任意の自然数 l に対し，$J_l=\bigcup_{n\geqslant l} I_n\in\mathscr{F}$．$i\in J_l$ なら i はある I_n $(n\geqslant l)$ に属する．よって $\nu(i)=m(n)\geqslant n\geqslant l$．したがって $\{i\,;\,\nu(i)\geqslant l\}\in\mathscr{F}$，すなわち $\nu\geqslant l$. l は任意だから ν は無限大自然数である．しかも，I の任意の元 i に対して $|a(\nu(i))-b|>e$ だから $^*a(\nu)\not\fallingdotseq b$.

2)　もまったく同様に証明されるから省略する．∎

1.3.4　定理　　1)　実数 a の近くで定義された実数値函数 f が a で連続であるためには，$^*f(\mu(a))\subset\mu(f(a))$ となることが必要十分である．言いかえると，$\xi\fallingdotseq a$ なら $^*f(\xi)\fallingdotseq f(a)$ となることが必要十分である．

2)　区間 A 上の実数値函数 f が一様連続であるためには，$^*A$ の元 ξ,η に対し，$\xi\fallingdotseq\eta$ なら $^*f(\xi)\fallingdotseq{}^*f(\eta)$ となることが必要十分である．

証明　　1a)　f が a で連続なら，任意の実数 $e>0$ に対し，実数 $d>0$ を取ると，$|x-a|\leqslant d$ なら $|f(x)-f(a)|\leqslant e$ となる．$\xi=[\xi(i)]\fallingdotseq a$ なら $|\xi-a|\leqslant d$ だから，$\{i\,;\,|\xi(i)-a|\leqslant d\}\in\mathscr{F}$．よって $\{i\,;\,|f(\xi(i))-f(a)|\leqslant e\}\in\mathscr{F}$，したがって $|^*f(\xi)-f(a)|\leqslant e$．$e$ は任意だから $^*f(\xi)\fallingdotseq f(a)$.

1b)　f が a で不連続なら，ある実数 $e>0$ を取ると，どんな実数 $d>0$ に

対しても，$|x-a|\leqslant d$，$|f(x)-f(a)|>e$ なる実数 x が存在する．$d=\dfrac{1}{n+1}$ $(n\in\boldsymbol{N})$ に対し，選択公理によって x_n を対応させる：$|x_n-a|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$，$|f(x_n)-f(a)|>e$．$I$ の元 i が I_n に属するとき $\xi(i)=x_n$ として超実数 $\xi=[\xi(i)]$ を定める．$\xi\in\mu(a)$ である．実際，任意の $m\in\boldsymbol{N}$ に対し，$i\notin I_0\cup\cdots\cup I_m$ なら $|\xi(i)-a|\leqslant\dfrac{1}{m+1}$．$\bigcup_{n>m}I_n\in\mathscr{F}$ だから $|\xi-a|\leqslant\dfrac{1}{m+1}$．$m$ は任意だから $\xi\fallingdotseq a$ となる．一方，$i\in I_n$ なら $({}^*f(\xi))(i)=f(\xi(i))=f(x_n)$．よって $|{}^*f(\xi)-f(a)|>e$，したがって ${}^*f(\xi)\not\fallingdotseq f(a)$．

2a)　f が一様連続なら，任意の実数 $e>0$ に対し，実数 $d>0$ が存在し，$x,y\in A$，$|x-y|\leqslant d$ なら $|f(x)-f(y)|\leqslant e$ となる．$\xi,\eta\in{}^*A$，$\xi=[\xi(i)]$，$\eta=[\eta(i)]$，$\xi\fallingdotseq\eta$ とする．$J=\{i\,;\,\xi(i)\in A,\ \ \eta(i)\in A,\ |\xi(i)-\eta(i)|\leqslant d\}$ は $\mathscr{F}$ に属する．$i\in J$ なら $|f(\xi(i))-f(\eta(i))|\leqslant e$，よって $|{}^*f(\xi)-{}^*f(\eta)|\leqslant e$．$e$ は任意だから ${}^*f(\xi)\fallingdotseq{}^*f(\eta)$．

2b)　f が一様連続でなければ，ある実数 $e>0$ を取ると，どんな実数 $d>0$ に対しても，$x,y\in A$，$|x-y|\leqslant d$，$|f(x)-f(y)|>e$ なるものが存在する．$d=\dfrac{1}{n+1}$ $(n\in\boldsymbol{N})$ に対し，選択公理によって x_n,y_n を対応させる：$x_n,y_n\in A$，$|x_n-y_n|\leqslant\dfrac{1}{n+1}$，$|f(x_n)-f(y_n)|>e$．$I$ の元 i が I_n に属するとき $\xi(i)=x_n$，$\eta(i)=y_n$ として超実数 $\xi=[\xi(i)]$，$\eta=[\eta(i)]$ を定めると，1b) と同様に $\xi,\eta\in{}^*A$，$\xi\fallingdotseq\eta$，${}^*f(\xi)\not\fallingdotseq{}^*f(\eta)$ となる．▮

1.3.5　例　　標準的な定理や具体例を超準的な方法で扱ってみよう．

1)　有界閉区間で連続な函数は一様連続である．

証明　　f が $[a,b]$ で連続とする．$\xi,\eta\in{}^*[a,b]$，$\xi\fallingdotseq\eta$ とする．$a\leqslant\xi,\eta\leqslant b$ だから，定理 **1.3.2** 1) により，$[a,b]$ の元 c が存在して $\xi,\eta\in\mu(c)$ となる．f の連続性により，${}^*f(\xi)\fallingdotseq f(c)$，${}^*f(\eta)\fallingdotseq f(c)$，よって ${}^*f(\xi)\fallingdotseq{}^*f(\eta)$．▮

2)　x が無理数および 0 のとき，$f(x)=0$，x が有理数 $\dfrac{p}{q}$ $\left(\dfrac{p}{q}\right.$ は既約，$p\neq0$，$\left.q>0\right)$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{q}$ として函数 f を定めると，f は無理点および 0 で連続である．

証明　　a を無理数または 0 とし，$\xi\fallingdotseq a$，$\xi\neq a$ とする．ξ が超無理数 ($\xi\notin{}^*\boldsymbol{Q}$) なら，${}^*f$ の定義によって ${}^*f(\xi)=0=f(a)$．ξ が超有理数なら，$\xi=\dfrac{\lambda}{\mu}$ $(\lambda,\mu\in{}^*\boldsymbol{Z}$，$\dfrac{\lambda}{\mu}$ は既約，$\mu>0)$ と書ける．もし μ が有限超整数なら λ も

有限超整数だから，例**1.2.5**によって $\lambda, \mu \in \boldsymbol{Z}$ となり，ξ は普通の有理数である．$\xi \fallingdotseq a$ だから $\xi = a$ となり，仮定に反する．よって μ は無限大超自然数であり，$^*f(\xi) = \frac{1}{\mu} \fallingdotseq 0$ となる．∎

3)　$f(x) = x^2$ $(x \in \boldsymbol{R})$，$g(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x > 0)$ は一様連続でない．

証明　都合のよい超積を使えばよいのだから，$I = \boldsymbol{N} - \{0\}$ とする．$\xi = \left[n + \frac{1}{n}\right]$，$\eta = [n]$ とすると，$\xi \fallingdotseq \eta$，$^*f(\xi) - {}^*f(\eta) = \left[2 + \frac{1}{n^2}\right] \fallingdotseq 2$．つぎに $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ については，$\xi(n) = \frac{1}{2\pi n}$，$\eta(n) = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ とすると，$\xi \fallingdotseq 0 \fallingdotseq \eta$．$^*g(\xi) = [\sin 2\pi n] = 0$，$^*g(\eta) = \left[\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$．∎

1.3.6　定理　区間 A 上の函数列 $\{f_n ; n \in \boldsymbol{N}\}$ を，写像 $F : \boldsymbol{N} \times A \to \boldsymbol{R}$，$F(n, x) = f_n(x)$ と見て，$^*F(\nu, \xi)$ $(\nu \in {}^*\boldsymbol{N},\ \xi \in {}^*A)$ を $^*f_\nu(\xi)$ と書くことにする．f_n が f に一様に収束するためには，任意の無限大超自然数 ν および任意の $\xi \in {}^*A$ に対して $^*f_\nu(\xi) \fallingdotseq {}^*f(\xi)$ となることが必要十分である．

証明　1°　f_n が f に一様収束すれば，任意の実数 $e > 0$ に対し，ある $n_0 \in \boldsymbol{N}$ を取ると，n_0 より先の任意の $n \in \boldsymbol{N}$ および任意の $x \in A$ に対して，$|f_n(x) - f(x)| \leqq e$ となる．$\nu \in \boldsymbol{N}'$，$\xi \in {}^*A$ としよう．$\nu \geqq n_0$ だから $J = \{i ; \nu(i) \geqq n_0\} \in \mathscr{F}$．$\xi \in {}^*A$ だから $\xi(i) \in A$ としてよい．$i \in J$ なら，

$$(|{}^*f_\nu(\xi) - {}^*f(\xi)|)(i) = |f_{\nu(i)}(\xi(i)) - f(\xi(i))| \leqq e.$$

2°　f_n が f に一様収束しなければ，ある実数 $e > 0$ を取ると，どんな $n \in \boldsymbol{N}$ に対しても，n より先の $m \in \boldsymbol{N}$ および A の点 x で，$|f_m(x) - f(x)| > e$ なるものが存在する．選択公理により，各 n に対して $m(n), x_n$ を選ぶ．$i \in I_n$ に対して $\nu(i) = m(n)$，$\xi(i) = x_n$ として $\nu \in {}^*\boldsymbol{N}$，$\xi \in {}^*A$ を定める．任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対し，$i \notin I_0 \cup \cdots \cup I_k$ なら $\nu(i) \geqq k$ だから ν は無限大超自然数である．$i \in I_n$ に対し，

$$(|{}^*f_\nu(\xi) - {}^*f(\xi)|)(i) = |f_{m(n)}(x_n) - f(x_n)| > e.$$

よって $^*f_\nu(\xi) \not\fallingdotseq {}^*f(\xi)$．∎

1.3.7　例　1)　区間 A 上の連続函数の列 $\{f_n\}$ が f に一様収束すれば，f も連続である．

証明　一様収束の本来の定義によれば，任意の実数 $e>0$ に対し，ある番号 n を取ると，任意の $x\in A$ に対して $|f(x)-f_n(x)|\leqq e$ となる．したがって任意の $\xi\in {}^*A$ に対して $|{}^*f(\xi)-{}^*f_n(\xi)|\leqq e$ となる．さて，$x\in A$, $\xi\in {}^*A$, $\xi\fallingdotseq x$ とする． f_n の連続性により，${}^*f_n(\xi)\fallingdotseq f_n(x)$, したがって $|{}^*f_n(\xi)-f_n(x)|\leqq e$.

$$|{}^*f(\xi)-f(x)|\leqq|{}^*f(\xi)-{}^*f_n(\xi)|+|{}^*f_n(\xi)-f_n(x)|$$
$$+|f_n(x)-f(x)|\leqq 3e.$$

e は任意だから ${}^*f(\xi)\fallingdotseq f(x)$. ▮

2)　$f_n(x)=e^{-nx^2}$ ($x\in\boldsymbol{R}$, e は自然対数の底)， $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$ とすると，f_n は f に収束するが，一様収束しない．これは前例の結果から明らかだが，直接にはつぎのようにすればよい． $I=\boldsymbol{N}-\{0\}$ とし，$\nu=[n^2]$, $\xi=\left[\dfrac{1}{n}\right]$ とすれば ${}^*f_\nu(\xi)=e^{-1}$, ${}^*f(\xi)=0$.

微　　分

1.3.8　定理　関数 f が a で微分可能であるためには，a に無限に近い任意の超実数 ξ,η に対して $\dfrac{{}^*f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$, $\dfrac{{}^*f(\eta)-f(a)}{\eta-a}$ がともに有限超実数で，これらがたがいに無限に近いことが必要十分である．このとき，$f'(a)=\mathrm{st}\left[\dfrac{{}^*f(\xi)-f(a)}{\xi-a}\right]$.

証明は定理 **1.3.4** によって明らかである． ▮

注意　$\mu(0)$ を走る変数 $\xi-a$ を dx, ${}^*f(\xi)-f(a)$ を dy と書けば，$\dfrac{dy}{dx}\fallingdotseq f'(a)$. すなわち，独立変数 x の微分 dx とは $\mu(0)$ を動く変数のことであり，従属変数の微分 dy とは，関数値の差 ${}^*f(a+dx)-f(a)$ のことである．

1.3.9　定義 (高階の微分)　適当な条件のもとで $\dfrac{d^ny}{dx^n}\fallingdotseq f^{(n)}(x)$ を成立たせるために，高階の微分 d^ny を定義する．無限小超実数 γ を固定しておく． f を $\boldsymbol{R}$ の開区間 $]a,b[$ 上の関数とする．関数 $d_\gamma f$ を，$d_\gamma f(\xi)={}^*f(\xi+\gamma)-{}^*f(\xi)$ によって定義する．変数 ξ は超実数で，$a+|\gamma|<\xi<b-|\gamma|$ なら $d_\gamma f(\xi)$ は定義される．定義域の幅は無限小しか減っていない．したがって，任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対し，線型作用素 $d_\gamma{}^n$: $d_\gamma{}^nf(\xi)=d_\gamma(d_\gamma{}^{n-1}f)(\xi)$

が定まる．函数 $d_\gamma{}^n f$ の定義域は $^*]a, b[-(\mu(a)\cup\mu(b))$ を含む．

γ を，$\mu(0)$ を動く変数と思って dx と書き，対応する d_γ を単に d と書くことにする．また，$(dx)^n$ を dx^n と書く．

1.3.10　定理　　f が C^n 級（n 階までの導函数が存在して連続）なら $\dfrac{d^n f(\xi)}{dx^n} \fallingdotseq {}^*f^{(n)}(\xi)$．　とくに，　$\xi=x\in \boldsymbol{R}$　として見なれた略記法　$d^n y = d^n f(x)$ を使えば，$\dfrac{d^n y}{dx^n} \fallingdotseq f^{(n)}(x)$．

証明　　1°　有限階差を思い出そう．実数 x, h に対し，式に意味があるかぎり，　$\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x)$，　$\Delta_h{}^2 f(x)=\Delta_h(\Delta_h f)(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$．同様に，$\Delta_h{}^n f(x)=\Delta_h(\Delta_h{}^{n-1}f)(x)$ であった．このとき，適当な実数 s $(0<s<1)$ を取ると，$\dfrac{\Delta_h{}^n f(x)}{h^n}=f^{(n)}(x+nsh)$ が成立つ．これは平均値の定理と n に関する帰納法とによって簡単に証明される．

2°　$\gamma=[\gamma(i)]\fallingdotseq 0$，$\xi=[\xi(i)]$ に対し，ある $J\in\mathscr{F}$ を取ると，　$i\in J$ に対し，

$$\frac{d_\gamma{}^n f(\xi)}{\gamma^n}(i)=\frac{\Delta_{\gamma(i)}{}^n f(\xi(i))}{\gamma(i)^n}=f^{(n)}(\xi(i)+n\cdot s(i)\gamma(i)) \qquad (0<s(i)<1)$$

となる．$\sigma=[s(i)]$ とすれば $0<\sigma<1$ で，　$\dfrac{d_\gamma{}^n f(\xi)}{\gamma^n}={}^*f^{(n)}(\xi+n\sigma\gamma)$　となる．仮定によって $f^{(n)}$ は連続だから $\dfrac{d^n f(\xi)}{dx^n}\fallingdotseq {}^*f^{(n)}(\xi)$ が成立つ．▮

1.3.11　定義　　有限個の超実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対し，

$$o(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k\alpha_k\ ;\ \xi_k\in\boldsymbol{a}=\mu(0)\ \ (1\leqslant k\leqslant n)\right\}$$

と置く．　$\alpha=\max(|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|)$　とすれば，　$o(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)=o(\alpha)$　である．$o(\alpha)$ は $\boldsymbol{A}$ 加群（$\boldsymbol{A}$ は有限超実数環）である．$\beta, \gamma\in{}^*\boldsymbol{R}$，$\beta-\gamma\in o(\alpha)$ のとき，$\beta\equiv\gamma \bmod o(\alpha)$ と書く．$\dfrac{\beta}{\alpha}\fallingdotseq\dfrac{\gamma}{\alpha} \Longleftrightarrow \beta\equiv\gamma \bmod o(\alpha)$．

1.3.12　定理　　$\boldsymbol{R}^n$ の点 $a=(a_1, \cdots, a_n)$ のまわりで定義された n 変数の実数値函数　$f(x_1, \cdots, x_n)$ が C^1 級だとする．無限小超実数 $dx_1, \cdots, dx_n$ に対し，**全微分** df を，

$$df(a_1, \cdots, a_n)=f(a_1+dx_1, \cdots, a_n+dx_n)-f(a_1, \cdots, a_n)$$

で定義する．f の第 k 変数に関する偏導函数を f_{x_k} または $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ で表わすと，

$$df(a_1, \cdots, a_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(a_1, \cdots, a_n)dx_k \mod o(dx_1, \cdots, dx_n).$$

なじみの記号を使えば，

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n \mod o(dx_1, \cdots, dx_n).$$

証明 1° $h=(h_1, \cdots, h_n) \in \boldsymbol{R}^n$ とし，$0 \leqslant t \leqslant 1$ に対し，

$$g(t) = f(a_1 + h_1 t, \cdots, a_n + h_n t)$$

と置くと，g は C^1 級で，$g'(t) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(a_1 + h_1 t, \cdots, a_n + h_n t) \cdot h_k$. 平均値の定理により，ある実数 s $(0<s<1)$ を取ると，

$$f(a_1+h_1, \cdots, a_n+h_n) - f(a_1, \cdots, a_n) = g(1) - g(0)$$
$$= g'(s) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(a_1 + sh_1, \cdots, a_n + sh_n) \cdot h_k$$

が成立つ.

2° $dx_k = \gamma_k = [\gamma_k(i)] \fallingdotseq 0$ とすると，

$$df(a_1, \cdots, a_n)(i) = f(a_1 + \gamma_1(i), \cdots, a_n + \gamma_n(i)) - f(a_1, \cdots, a_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(a_1 + s(i)\gamma_1(i), \cdots, a_n + s(i)\gamma_n(i)) \cdot \gamma_k(i).$$

よって $df(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(a_1 + \sigma\gamma_1, \cdots, a_n + \sigma\gamma_n) \cdot \gamma_k$. ただし，$\sigma = [s(i)]$，$0<\sigma<1$. C^1 級の仮定により，

$$df(a_1, \cdots, a_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(a_1, \cdots, a_n) \cdot \gamma_k \mod o(\gamma_1, \cdots, \gamma_n). \quad \blacksquare$$

＊有限和と積分

これらの問題はここでは十分に扱えない．それらを一般的に扱うのは次章にまわし，ここでは簡単な場合に触れるだけにする．

$^*\boldsymbol{N}$ の区間 $[\kappa, \lambda] = \{\nu \in {}^*\boldsymbol{N} ; \kappa \leqslant \nu \leqslant \lambda\}$ に，有限集合 $\{n \in \boldsymbol{N} ; k \leqslant n \leqslant l\}$ と同じような性質があることを示すのが当面の目的である.

1.3.13 命題 実数列 $a(n)$ に対し，$^*\boldsymbol{N}$ から $^*\boldsymbol{R}$ への写像 $^*a : \nu = [\nu(n)] \longmapsto {}^*a(\nu) = [a(\nu(n))]$ が定まる．$\kappa, \lambda \in {}^*\boldsymbol{N}$，$\kappa \leqslant \lambda$ のとき，$\{{}^*a(\nu) ; \kappa \leqslant \nu \leqslant \lambda\}$ は最大元，最小元をもつ.

証明 $J = \{i ; \kappa(i) \leqslant \lambda(i)\} \in \mathscr{F}$. $i \in J$ に対し，$a(m) = \max\{a(n) ; \kappa(i)$

$\leqslant n \leqslant \lambda(i)\}$ となる最小の m を m_i とする．$i \in J$ に対して $\mu(i)=m_i$，$i \notin J$ に対して $\mu(i)=0$ として $\mu=[\mu(i)] \in {}^*\boldsymbol{N}$ を定めると，$\kappa \leqslant \mu \leqslant \lambda$．さて，$\kappa \leqslant \nu \leqslant \lambda$ なる任意の ν に対し，$A_\nu=\{i\,;\,\kappa(i) \leqslant \nu(i) \leqslant \lambda(i)\} \in \mathscr{F}$，$A_\nu \subset J$．$i \in A_\nu$ なら $a(\nu(i)) \leqslant a(\mu(i))$，よって ${}^*a(\nu) \leqslant {}^*a(\mu)$．▮

1.3.14　定義　$L=\{(k,l) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}\,;\,k \leqslant l\}$ とすると，${}^*L=\{(\kappa,\lambda) \in {}^*\boldsymbol{N} \times {}^*\boldsymbol{N}\,;\,\kappa \leqslant \lambda\}$ である．数列 $a:\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ に対し，$s(a\,;\,k,l)=\sum_{n=k}^{l} a(n)$ を L から $\boldsymbol{R}$ への写像とみると，${}^*L$ から ${}^*\boldsymbol{R}$ への写像 $(\kappa,\lambda) \mapsto {}^*s(a\,;\,\kappa,\lambda)$ が定まる．${}^*s(a\,;\,\kappa,\lambda)$ を ${}^*\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} {}^*a(\nu)$ と書き，**＊有限和**（スター有限和）と言う．

1.3.15　命題　＊有限和に対し，普通の有限和のときと同じような操作が可能である．すなわち，

1)　$\kappa \leqslant \mu < \lambda$ なら，$\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} {}^*a(\nu)=\sum_{\nu=\kappa}^{\mu} {}^*a(\nu)+\sum_{\nu=\mu+1}^{\lambda} {}^*a(\nu)$.

2)　$\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} ({}^*a(\nu)+{}^*b(\nu))=\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} {}^*a(\nu)+\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} {}^*b(\nu)$.

3)　$c \in \boldsymbol{R}$ なら，$c\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} {}^*a(\nu)=\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} c\cdot{}^*a(\nu)$．とくに $\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} c=(\lambda-\kappa+1)c$.

4)　$\left|\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} {}^*a(\nu)\right| \leqslant \sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} |{}^*a(\nu)|$.

証明　たとえば 1) は，$\kappa(i) \leqslant \mu(i) \leqslant \lambda(i)$ なる i に対し，

$$({}^*s(a\,;\,\kappa,\lambda)-{}^*s(a\,;\,\kappa,\mu)-{}^*s(a\,;\,\mu+1,\lambda))(i)$$
$$=s(a\,;\,\kappa(i),\lambda(i))-s(a\,;\,\kappa(i),\mu(i))-s(\mu(i)+1,\lambda(i))=0$$

となるから成立つ．残りも同様に証明される．▮

1.3.16　例　$\lim_{n\to\infty} a(n)=b$ なら，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1)+\cdots+a(n)}{n}=b$.

証明　$\{a(n)\}$ は有界だから，ある実数 r を取ると，あらゆる $\nu \in {}^*\boldsymbol{N}$ に対して $|{}^*a(\nu)-b| \leqslant r$．$\nu$ が無限大超自然数なら，定理 **1.3.3** により $|{}^*a(\nu)-b| \fallingdotseq 0$．任意の無限大超自然数 λ に対して $\frac{1}{\lambda}{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda} {}^*a(\nu)$ が b に無限に近いことを示せばよい．$\kappa \leqslant \sqrt{\lambda} \leqslant \kappa+1$ なる $\kappa \in \boldsymbol{N}'$ を取っておく．命題 **1.3.13** により，$\varepsilon=\max_{\kappa+1 \leqslant \nu \leqslant \lambda} |{}^*a(\nu)-b|$ が存在し，無限小超実数である．

$$\left|\frac{1}{\lambda}{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}{}^*a(\nu)-b\right|=\frac{1}{\lambda}\left|{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}{}^*a(\nu)-{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}b\right|\leqslant\frac{1}{\lambda}{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}|{}^*a(\nu)-b|$$

$$=\frac{1}{\lambda}{}^*\sum_{\nu=1}^{\kappa}|{}^*a(\nu)-b|+\frac{1}{\lambda}{}^*\sum_{\nu=\kappa+1}^{\lambda}|{}^*a(\nu)-b|\leqslant\frac{\kappa r}{\lambda}+\frac{\lambda-\kappa}{\lambda}\varepsilon\leqslant\frac{r}{\kappa}+\varepsilon\fallingdotseq 0. \blacksquare$$

1.3.17　定理　$\boldsymbol{R}$ の閉区間 $[a,b]$ および自然数 l に対し,

$$a_n=a(l,n)=a+\frac{n}{l}(b-a)\qquad(0\leqslant n\leqslant l)$$

とおく : ${}^*a_\nu={}^*a(\lambda,\nu)=a+\frac{\nu}{\lambda}(b-a)$ $(0\leqslant\nu\leqslant\lambda,\ \lambda\in{}^*\boldsymbol{N})$.

$[a,b]$ 上の連続函数 f に対し, λ を無限大超自然数に取ると,

$$\int_a^b f(x)dx=\mathrm{st}\left[{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}{}^*f({}^*a_\nu)\frac{b-a}{\lambda}\right]$$

が成立つ.

証明　$S(l)=\sum_{n=1}^{l}f(a(l,n))\frac{b-a}{l}$ とおくと, ${}^*S(\lambda)={}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}{}^*f({}^*a(\lambda,\nu))\frac{b-a}{\lambda}$ であり, 一方 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{l\to+\infty}S(l)$ だから, 定理 **1.3.3** によって成立つ. ■

§4　非可測函数の構成

これはいわゆる無限小解析ではないが, 簡単で面白いので書いておく. この例はルクセンバーグ [5] による.

1.4.1　補題　$\boldsymbol{R}$ または区間上のルベーグ可測函数 f が任意に小さい周期をもつならば, f はほとんど到るところある定数に等しい.

証明は積分論の本にゆずる.

1.4.2　定理　λ を無限大超自然数とすると, $f(x)=\langle 2^\lambda x\rangle-2\langle 2^{\lambda-1}x\rangle$ は実数値函数で, ルベーグの意味で可測でない. ただし, 超実数 α に対し, $\langle\alpha\rangle$ は α を超えない最大の超整数を表わす. また, $\lambda=[\lambda(i)]$ のとき, $2^\lambda=[2^{\lambda(i)}]$.

証明　1°　$\alpha-1<\langle\alpha\rangle\leqslant\alpha$ であり, $\alpha\notin{}^*\boldsymbol{Z}$ なら $\langle-\alpha\rangle=-\langle\alpha\rangle-1$ である. $2^{\lambda-1}x-1<\langle 2^{\lambda-1}x\rangle\leqslant 2^{\lambda-1}x$. よって $2^\lambda x-2<2\langle 2^{\lambda-1}x\rangle\leqslant 2^\lambda x$. 一方, $2^\lambda x-1<\langle 2^\lambda x\rangle\leqslant 2^\lambda x$. ゆえに $-1<\langle 2^\lambda x\rangle-2\langle 2^{\lambda-1}x\rangle<2$. よって $f(x)=0$ または $f(x)=1$.

2°　$x=2^{-n}p$ $(n\in\boldsymbol{N}, p\in\boldsymbol{Z})$ の形の実数を二進数ということにする．x が二進数なら $f(x)=0$．実際，$f(2^{-n}p)=2^{\lambda-n}p-2\cdot 2^{\lambda-1-n}p=0$．

3°　任意の二進数は f の周期である．なぜなら $f(x+2^{-n}p)=\langle 2^{\lambda}x+2^{\lambda-n}p\rangle -2\langle 2^{\lambda-1}x+2^{\lambda-1-n}p\rangle=f(x)$．

4°　x が二進数でなければ，$f(1-x)=1-f(x)$．実際，任意の $\mu\in {}^*\boldsymbol{Z}$ に対して $2^{\mu}x\notin {}^*\boldsymbol{Z}$ だから，

$$f(1-x)=\langle 2^{\lambda}-2^{\lambda}x\rangle-2\langle 2^{\lambda-1}-2^{\lambda-1}x\rangle$$
$$=2^{\lambda}-\langle 2^{\lambda}x\rangle-1-2^{\lambda}+2\langle 2^{\lambda-1}x\rangle+2=1-f(x).$$

5°　f が可測だったとすると，1°, 3° および補題により，$f(x)$ はほとんど至るところ 0 か，またはほとんど至るところ 1 かである．

6°　$A=\left\{x\in\boldsymbol{R}\,;\,0\leqslant x\leqslant 1,\ f(x)<\frac{1}{2}\right\}$, $B=\left\{x\in\boldsymbol{R}\,;\,0\leqslant x\leqslant 1,\ f(x)>\frac{1}{2}\right\}$ はともに可測である．A の特性函数 χ_A の値は $f(x)$ が $\frac{1}{2}$ より小さいかどうかによって決まるから，3° によって任意の二進数が χ_A の周期であり，補題によって $\chi_A(x)$ はほとんど到るところ 0 か，またはほとんど到るところ 1 である．すなわち，A の測度 $m(A)$ は 0 または 1 である．

7°　x が非二進数で $0<x<1$ なら，4° により，$x\in A \Longleftrightarrow 1-x\in B$．$A$ に属する非二進数の全体を A_0，B に属する非二進数の全体を B_0 とすると，$B_0=\{1-x\,;\,x\in A_0\}$．よって $m(A_0)=m(B_0)$．二進数は可算個しかないから，$m(A)=m(A_0)=m(B_0)=m(B)$．この共通の値は 0 か 1 かのどちらかであるが，$A\cap B=\emptyset$，$A\cup B\subset[0,1]$ だから 0 でなければならない．したがって $f(x)$ はほとんど到るところ $\frac{1}{2}$ に等しいことになり，1° に反する．∎

§5　超積の濃度

集合 X の濃度を $|X|$ で表わす．ω は可算濃度，2^{ω} は連続濃度である．

1.5.1　補題　　$\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}$ への写像の集合 $\mathscr{A}$ で，つぎの性質をもつものが存在する．

a)　$|\mathscr{A}|=2^{\omega}$．

b)　$f\in\mathscr{A}$，$n\in\boldsymbol{N}$ なら $f(n)<2^{n}$．

c) $f, g \in \mathscr{A}$, $f \neq g$ なら，$f(n)=g(n)$ となる $n \in \boldsymbol{N}$ は有限個しかない.

証明 $\boldsymbol{N}$ から $\{0,1\}$ への写像 φ に対し，$\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}$ への写像 $\tilde{\varphi}$ を

$$\tilde{\varphi}(n)=\sum_{m=0}^{n-1}\varphi(m)2^m$$

によって定め，$\mathscr{A}=\{\tilde{\varphi}\,;\,\varphi \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{N}, \{0,1\})\}$ とおく．$\mathscr{A}$ が期待されるものであることを示す.

a) 写像 $\varphi \longmapsto \tilde{\varphi}$ は単射である．実際，$\varphi, \psi \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{N}, \{0,1\})$，$\tilde{\varphi}=\tilde{\psi}$ とすると，$\tilde{\varphi}(1)=\tilde{\psi}(1)$ から $\varphi(0)=\psi(0)$．$m<n$ に対して $\varphi(m)=\psi(m)$ を仮定すると，

$$\tilde{\varphi}(n+1)=\sum_{m=0}^{n-1}\varphi(m)2^m+\varphi(n)2^n,$$

$$\tilde{\psi}(n+1)=\sum_{m=0}^{n-1}\psi(m)2^m+\psi(n)2^n,$$

したがって $\varphi(n)=\psi(n)$．よって $2^\omega=|\mathrm{Map}(\boldsymbol{N}, \{0,1\})| \leqslant |\mathscr{A}|$．一方 $|\mathscr{A}| \leqslant |\mathrm{Map}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N})|=\omega^\omega=2^\omega$．したがって $|\mathscr{A}|=2^\omega$.

b) $\tilde{\varphi}(n)=\sum_{m=0}^{n-1}\varphi(m)2^m \leqslant \sum_{m=0}^{n-1}2^m<2^n$.

c) $\tilde{\varphi} \neq \tilde{\psi}$ なら $\varphi \neq \psi$ だから，$\varphi(n) \neq \psi(n)$ なる n が存在する．$k>n$ ならば，二進展開の一意性により，$\tilde{\varphi}(k)=\sum_{m=0}^{k-1}\varphi(m)2^m \neq \sum_{m=0}^{k-1}\psi(m)2^m=\tilde{\psi}(k)$. ∎

1.5.2 定理 I を無限集合，$\{X_i\,;\,i \in I\}$ を空でない集合の族，$\mathscr{F}$ を I 上の自由超フィルターとする．どの $n \in \boldsymbol{N}$ に対しても $A_n=\{i \in I\,;\,|X_i|=n\}$ が $\mathscr{F}$ に属さなければ，超積 $\prod_{\mathscr{F}}X_i$ の濃度は少くとも連続濃度になる.

証明 X_i が無限集合であるような i の全体を B とする.

1° $B \notin \mathscr{F}$ の場合．各 $i \in B$ に対する X_i から一点 a_i を選び（選択公理），X_i を $\{a_i\}$ で置きかえた集合族（X_i が有限ならそのまま）に対して定理が成立てばよい．$A_1 \cup B \notin \mathscr{F}$ だから定理の条件はみたされている．だから，はじめから X_i はすべて有限集合だとして証明する（このとき，$\mathscr{F}$ は勝手な超フィルターとしておいても，必然的に自由超フィルターになることに注意せよ).

$J_0=A_1$，$J_n=A_{2^n} \cup \cdots \cup A_{2^{n+1}-1}$ と置くと，$A_0=\varnothing$ だから $\{J_n\,;\,n \in \boldsymbol{N}\}$ は I の分割で，J_n はどれも $\mathscr{F}$ に属さず，$i \in J_n$ なら $|X_i| \geqslant 2^n$ である.

$i\in I$ が J_n に属するとき，$n=n(i)$ と書く．各 $i\in I$ に対し，X_i から $2^{n(i)}$ 個の元 $m_{i,k}$ $(0\leqslant k<2^{n(i)})$ を取っておく．上の補題の函数族 $\mathscr{A}$ に属する f に対し，直積 $\prod_{i\in I} X_i$ の元 φ_f を，$\varphi_f(i)=m_{i,f(n(i))}$ によって定める $(f(n(i))<2^{n(i)}$ だから可能)．$f, g\in\mathscr{A}$，$f\neq g$ としよう．$f(n)=g(n)$ となる $n\in \boldsymbol{N}$ の全体Cは有限集合である．一方，$i\in I$, $\varphi_f(i)=\varphi_g(i)$ なら $f(n(i))=g(n(i))$ だから，

$$\{i\in I\,;\,\varphi_f(i)=\varphi_g(i)\}\subset\bigcup_{n\in C} J_n.$$

右辺は $\mathscr{F}$ に属さないから左辺も $\mathscr{F}$ に属さない．したがって φ_f と φ_g とは $\mathscr{F}$ を法として合同でない．よって，$\mathscr{A}$ から超積 $\prod_{\mathscr{F}} X_i$ への写像 $f\mapsto\varphi_f \bmod \mathscr{F}$ は単射である．だから，$|\prod_{\mathscr{F}} X_i|\geqslant|\mathscr{A}|=2^{\omega}$.

2°　$B\in\mathscr{F}$ の場合．$\mathscr{F}$ は自由だから，I の分割 $\{I_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ で $I_n\notin\mathscr{F}$ なるものが存在する．B の元 i に対し，$i\in I_n$ のとき，X_i の部分集合 Y_i で，$|Y_i|=n+1$ なるものを取る．$i\in I-B$ に対しては $Y_i=X_i$ とする．集合族 $\{Y_i\,;\,i\in I\}$ は空でない有限集合だけから成り，$Y_i\subset X_i$ だから $|\prod_{\mathscr{F}} Y_i|\leqslant|\prod_{\mathscr{F}} X_i|$．各 $n\in\boldsymbol{N}$, $n\neq 0$ に対し，

$$\{i\in I\,;\,|Y_i|=n\}=A_n\cup(B\cap I_{n-1})\notin\mathscr{F}.$$

よって定理の条件がみたされ，1° によって $|\prod_{\mathscr{F}} Y_i|\geqslant 2^{\omega}$ となる．∎

1.5.3　系　　自由超フィルターを法とする超積は決して可算集合にならない．

証明　　集合族 $\{X_i\,;\,i\in I\}$ $(X_i\neq\emptyset)$ が前定理の条件をみたしていれば，$|\prod_{\mathscr{F}} X_i|\geqslant 2^{\omega}$．もし条件をみたさなければ，ある $n\in\boldsymbol{N}$, $n\neq 0$ を取ると，$A_n=\{i\in I\,;\,|X_i|=n\}\in\mathscr{F}$ となる．$i\in A_n$ に対し，$X_i=\{a_{i,1},\cdots,a_{i,n}\}$ とする．$i\notin A_n$ に対しては，各 X_i から一点 a_i を選んでおく．$1\leqslant k\leqslant n$ なる k に対し，$i\in A_n$ なら $\beta_k(i)=a_{i,k}$, $i\notin A_n$ なら $\beta_k(i)=a_i$ として超積の元 $\beta_k=[\beta_k(i)]$ を定める．超積の任意の元 $\alpha=[\alpha(i)]$ $(\alpha(i)\in X_i)$ に対し，$J_k=\{i\in A_n\,;\,\alpha(i)=a_{i,k}\}$ とおくと，$J_1\cup\cdots\cup J_n=A_n$．よって，ある k（一つだけ）について $J_k\in\mathscr{F}$ となる．$\{i\in I\,;\,\alpha(i)=\beta_k(i)\}=J_k\in\mathscr{F}$ だから $\alpha=\beta_k$，すなわち超積は n 個の元から成る有限集合である．∎

1.5.4　系　　Iを可算集合，$\mathscr{F}$ を非単項，したがって自由な超フィルタ

ーとする.

1) 各 $n\in N$ に対して $\{i\in I\,;\,|X_i|=n\}$ が有限なら, 超積は連続濃度をもつ. とくに例 **1.2.8**, 2) の体 $\prod_{\mathscr{F}}\boldsymbol{F}_p$, $\prod_{\mathscr{G}}\boldsymbol{F}_p$ はともに連続濃度である.

2) $^*\boldsymbol{N}$, $^*\boldsymbol{Q}$, $^*\boldsymbol{R}$ はすべて連続濃度である.

証明 $|\prod_{\mathscr{F}}X_i|\leqslant|^*\boldsymbol{N}|\leqslant|^*\boldsymbol{Q}|\leqslant|^*\boldsymbol{R}|\leqslant|^N\boldsymbol{R}|=(2^\omega)^\omega=2^{\omega\omega}=2^\omega$. 逆の不等式はすでに証明されている. ▮

注意 I が非可算なら, 超積の濃度は一般に大きくなる. この場合の超冪の濃度については定理 **3.2.11** を見よ.

練 習 問 題

1. 無限集合 I 上の超フィルター $\mathscr{F}$ に関するつぎの四条件はたがいに同値である.

a) $\mathscr{F}$ は自由である.

b) I の部分集合の可算族 $\{A_n\,;\,n\in \boldsymbol{N}\}$ で, $A_n\in\mathscr{F}$ $(n\in\boldsymbol{N})$, $\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}A_n=\varnothing$ なるものが存在する.

c) I の部分集合の可算族 $\{B_n\,;\,n\in \boldsymbol{N}\}$ で, $B_n\notin\mathscr{F}$ $(n\in\boldsymbol{N})$, $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}B_n\in\mathscr{F}$ なるものが存在する.

d) I の部分集合の可算族 $\{C_n\,;\,n\in \boldsymbol{N}\}$ で, $C_n\notin\mathscr{F}$ $(n\in\boldsymbol{N})$, $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}}C_n=I$ なるものが存在する.

2. $\mathscr{F}$ を無限集合 I 上の超フィルターとする. $\mathscr{F}$ の元がすべて I と等濃であるとき, $\mathscr{F}$ を**一様超フィルター**と言う.

1) $\mathscr{F}$ が一様であるためには, I の部分集合 A で, $|I-A|<|I|$ なるものがすべて $\mathscr{F}$ に属することが必要十分である.

2) 任意の無限集合上に一様超フィルターが存在する.

3. 体 K は超冪 $^*K$ の中で代数的に閉じている.

4. $^*\boldsymbol{C}$ は代数的閉体である. $^*\boldsymbol{R}$ は実閉体である.

5. 実数列 $\{a(n)\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ に対し, $\lim_{n\to+\infty}a(n)=+\infty$ と, 任意の無限大超自然数 ν に対して $^*a(\nu)$ が正の無限大超実数であることとは同値である.

6. f を実変数実数値函数とする. $\lim_{x\to a}f(x)=b$ であるためには, a に収束する任意の点列 $\{x_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ に対して $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=b$ が成りたつことが必要十分である. これを§3のやりかたで証明せよ.

7.　有限超有理数の全体を $\boldsymbol{B}$，無限小超有理数の全体を $\boldsymbol{b}$ とする．$\boldsymbol{B}$ は環，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{B}$ の最大イデアルで，$\boldsymbol{B}/\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{R}$ と同型である．

これと同じことを $\boldsymbol{Q}$ の p 進絶対値について定式化し，p 進数体を作れ．

8.　$^*\boldsymbol{R}$ に順序位相を入れる．このとき，$^*\boldsymbol{R}$ の可算部分集合は有界かつ離散である．

9.　α を正の無限大超実数とし，$\delta_\alpha(\xi)=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}e^{-\alpha\xi^2}=\left[\sqrt{\frac{\alpha(i)}{\pi}}e^{-\alpha(i)\xi(i)^2}\right]$ $(\xi\in{}^*\boldsymbol{R})$ と置く．

1)　$\xi\not\fallingdotseq 0$ なら $\delta_\alpha(\xi)\fallingdotseq 0$.

2)　ξ が正〖負〗なら $\delta'_\alpha(\xi)$ は負〖正〗．ただし，微分は成分ごとにする．$\xi\not\fallingdotseq 0$ なら $\delta'_\alpha(\xi)\fallingdotseq 0$.

3)　$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\alpha(\xi)d\xi=1$．積分も成分ごとにする．

4)　連続函数 f に対し，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\alpha(x-\eta)\,{}^*f(\eta)d\eta\fallingdotseq f(x)$.

10.　ρ を正の無限小超実数とする．ある $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $|\alpha|<\rho^{-n}$ となる超実数 α の全体を $^\rho\boldsymbol{A}$ とし，任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $|\alpha|<\rho^n$ となる超実数 α の全体を $^\rho\boldsymbol{a}$ とする．$^\rho\boldsymbol{A}$ は $^*\boldsymbol{R}$ の部分環，$^\rho\boldsymbol{a}$ は $^\rho\boldsymbol{A}$ の極大イデアルで，$^\rho\boldsymbol{R}={}^\rho\boldsymbol{A}/{}^\rho\boldsymbol{a}$ は自然に非アルキメデス体となり，$\boldsymbol{R}\subset{}^\rho\boldsymbol{R}$ とみなすことができる．

11.　$\{A_i\,;\,i\in I\}$ を $\boldsymbol{N}$ の部分集合の族とし，$A=\prod_{\mathscr{F}}A_i$ とする $(A\subset{}^*\boldsymbol{N})$.

1)　$A\subset\boldsymbol{N}$ なら A は有限集合である．

2)　$\boldsymbol{N}\subset A$ なら，$\kappa\in\boldsymbol{N}'={}^*\boldsymbol{N}-\boldsymbol{N}$ が存在し，$[0,\kappa]\subset A$ となる．

3)　$A\subset\boldsymbol{N}'$ なら，$\kappa\in\boldsymbol{N}'$ が存在し，$[0,\kappa]\cap A=\emptyset$ となる．

4)　$\boldsymbol{N}'\subset A$ なら，$k\in\boldsymbol{N}$ が存在し，$\nu\geqslant k$ なら $\nu\in A$ となる．

12.　$\boldsymbol{N}$ 上の自由超フィルターを法とする超積について，つぎのものの濃度はいくつか．1）λ が無限大超自然数のとき，$^*[0,\lambda]=\{\nu\in{}^*\boldsymbol{N}\,;\,0\leqslant\nu\leqslant\lambda\}$，2）無限小超実数の全体，3）無限小超有理数の全体．

第二章　超準モデルとくに超冪モデル

この章で超準解析の枠組を作る．そのために，部分的に論理を形式化する．集合論の枠の中で超準解析を展開するここのやりかたは，マクホヴァー（あとがきの中の文献 [1]）による．しかし [1] と異なり，ここではモデル理論，とくにコンパクト性定理（付録IIを見よ）は使わず，超冪モデルを構成することによって超準モデルの存在を示す．

§1　宇　　宙

宇　宙　U

2.1.1　　ある集合 V から出発して，十分大きな集合 U を作るのがこの節の目的である．読者が背後にもつ集合論としては，素朴集合論でもよいし，公理的集合論でもよい．

古典解析学が目標なら，$V=\boldsymbol{R}$ とする．しかし，U はもっと大きく，$\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{R}$ の部分集合が U に属さなければならない．我々は，実変数実数値函数を $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ の部分集合と考えるから，$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\in U$ も要請される．そのためには冪集合 $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$，$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\boldsymbol{R}))$ 等々が U に属する必要がある．

また，位相空間の族 $\{X_i\,;\,i\in I\}$ を考える場合には，$\bigcup_{i\in I} X_i\in U$，$\prod_{i\in I} X_i\in U$ 等が必要だが，位相を U の中で定義するためには $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X_i))$ が U に属さなければならない．

つぎに，素朴な立場ではおのおのの実数は集合ではないが，公理的集合論ではあらゆるものが集合である†．どっちの立場でも理論を展開することができるようにするために，われわれの対象には，集合（set）と集合でないもの

† 原子を許容する公理的集合論もある．たとえば，P. Suppes : Axiomatic set theory, Van Nostrand (1960) を見よ．しかし，普通のものと比べるとずっと複雑になる．

（これを原子（atom）と言う）との両方がありうると想定する．

2.1.2　定義　集合 X に対し，X のある元に属する元の全体を X の**合併**と言い，$\bigcup X$ と書く．これは，X を，X 自身を添字域とする族 $\{y\,;\,y\in X\}$ と考えたときの合併 $\bigcup_{y\in X} y$ のことである（y は集合とは限らないことに注意）．$\bigcup X$ が X に含まれるとき，すなわち《$x\in y$，$y\in X$ なら $x\in X$》が成立つとき，X は**推移的**（transitive）であると言う．原子だけから成る集合は推移的である．

X 自身が原子のときは $\bigcup X=\varnothing$ と決める．

X が原子のときは $\mathscr{P}(X)$ も空集合とする．

2.1.3　定義　空でない集合 U がつぎの四条件をみたすとき，U を**宇宙**（universe）と言う：

a）U は推移的である．

b）$x, y\in U$ なら $\{x, y\}\in U$

c）$x\in U$ なら $\bigcup x\in U$.

d）$x\in U$ なら $\mathscr{P}(x)\in U$.

注意　《宇宙》という言葉は大げさすぎる．実際，こんな宇宙はいくらでもあるし，我々は一つの宇宙を外から見て仕事をする．そこでだけ論理を形式化するために作った便宜的宇宙である．たくさんある島宇宙の一つと思えばよい．

2.1.4　命題　宇宙 U にはつぎの性質がある：

1）空集合は U に属する．

2）$x\in U$，$y\subset x$ なら $y\in U$.

3）$x_1, \cdots, x_n\in U$ なら $x_1\cup\cdots\cup x_n\in U$.

4）$x_1, \cdots, x_n\in U$ なら $\{x_1, \cdots, x_n\}\in U$.

証明　1）U は空でないから $x\in U$ とする．b）によって $\{x\}=\{x, x\}\in U$. d）によって $\mathscr{P}\{x\}\in U$. $\varnothing\in\mathscr{P}\{x\}$．推移性によって $\varnothing\in U$.

2）$\mathscr{P}(x)\in U$. $y\in\mathscr{P}(x)$．推移性によって $y\in U$.

3）$n=2$ なら，$x_1\cup x_2=\bigcup\{x_1, x_2\}$.　b), c）によって $x_1\cup x_2\in U$. 一般

の場合は n に関する帰納法によればよい.

4) n に関する帰納法. $n=1$ なら, $\{x_1\}=\{x_1, x_1\}\in U$. $n=2$ なら条件 b) 自身である. $n-1$ のとき成立つとすれば, $y=\{x_1, \cdots, x_{n-1}\}\in U$. $\{x_1, \cdots, x_n\}=y\cup\{x_n\}\in U$. ∎

2.1.5 命題 集合 V に対し, 帰納的に $V_0=V$, $V_{n+1}=\bigcup V_n$ $(n\in \boldsymbol{N})$ と置き, $U_0=\bigcup\{V_n ; n\in \boldsymbol{N}\}=\bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} V_n$ と置く. さらに, 帰納的に $U_{n+1}=U_n\cup\mathscr{P}(U_n)$ と置き, $U=\bigcup\{U_n ; n\in \boldsymbol{N}\}=\bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} U_n$ と置く. このとき U は宇宙である.

証明 V は集合だから $\varnothing\subset V\subset U_0$. よって $\varnothing\in U_1$, すなわち U は空でない. 四条件を調べよう.

a) U の任意の元はある U_n に属する. だから, 各 U_n が推移的であることを言えばよい. $n=0$ のとき. $x\in U_0$ なら x はある V_m に属する. 定義により, x の任意の元は V_{m+1} に属する. よって U_0 は推移的である. U_{n-1} が推移的と仮定する. $x\in U_n$, $y\in x$ とする. $x\in U_{n-1}$ なら帰納法の仮定によって $y\in U_{n-1}$. $x\notin U_{n-1}$ なら $x\in\mathscr{P}(U_{n-1})$, すなわち $x\subset U_{n-1}$. よって $y\in U_{n-1}$.

b) $x, y\in U$ なら, x, y はともにある U_n に属する. よって, $\{x, y\}\subset U_n$. したがって $\{x, y\}\in\mathscr{P}(U_n)\subset U_{n+1}$.

c) $x\in U$ なら x はある U_n に属する. $z\in\bigcup x$ とすると, ある $y\in x$ に対して $z\in y$ となる. U_n は推移的だから $y\in U_n$. ふたたび U_n の推移性によって $z\in U_n$. したがって $\bigcup x\subset U_n$. よって $\bigcup x\in\mathscr{P}(U_n)\subset U_{n+1}$.

d) $x\in U$ なら x はある U_n に属する. x が原子なら $\mathscr{P}(x)=\varnothing\in U_1$. x が集合のとき, U_n の推移性によって $x\subset U_n$. $y\in\mathscr{P}(x)$ なら $y\subset x$ だから $y\subset U_n$. よって $y\in\mathscr{P}(U_n)\subset U_{n+1}$. したがって $\mathscr{P}(x)\subset U_{n+1}$, $\mathscr{P}(x)\in U_{n+2}$. ∎

順序対および有限積

2.1.6 定義 公理的集合論では, 普通 $(x, y)=\{\{x\}, \{x, y\}\}$ によって**順序対** (x, y) を定義する. 我々もこれに従う. これは便宜的なもので, 実際には

$$(x, y)=(u, v) \Longleftrightarrow x=u,\ \ y=v$$

が成立つように理論が作れればよいので，定義の仕方はどうでもよいのだが，上の定義（クラトフスキーによる）が一番簡明である．宇宙で仕事をする我我にも都合がよい．ただし，後の便宜のために，(x, y) のことを $x \operatorname{pr} y$ とも書くことにする（pr は paired with の略）．

$n>2$ に対して，$(x_1, \cdots, x_n)=((x_1, \cdots, x_{n-1}), x_n)$ と置く．

X, Y が集合のとき，X の元 x と Y の元 y との順序対 (x, y) の全体を X, Y の**積集合**または**直積**と言い，$X \times Y$ と書く．$n>2$ に対して $X_1 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ と置く．

2.1.7　命題　U を宇宙とする．

1)　$x, y \in U$ なら $(x, y) \in U$. 同様に $x_1, \cdots, x_n \in U$ なら $(x_1, \cdots, x_n) \in U$.

2)　X, Y が U に属する集合なら $X \times Y \in U$. 同様に $X_1, \cdots, X_n$ が U に属する集合なら $X_1 \times \cdots \times X_n \in U$.

証明　1)　宇宙の条件 b) による．

2)　$z \in X \times Y$ とすれば $z=(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$. $\{x\} \in \mathscr{P}(X \cup Y)$, $\{x, y\} \in \mathscr{P}(X \cup Y)$. よって $z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X \cup Y))$. したがって $X \times Y \subset \mathscr{P}(\mathscr{P}(X \cup Y)) \in U$. よって $X \times Y \in U$. ∎

関係．函数．無限積

2.1.8　(序章 §2 参照)　U を宇宙とする．

1)　$X_1, \cdots, X_n$ が U に属する集合のとき，直積 $X_1 \times \cdots \times X_n$ の部分集合 R を n **項関係**と言う．R は U に属する．X, Y を U に属する集合とし，$f \subset X \times Y$ とする（二項関係）．任意の $x \in X$ に対し，$(x, y) \in f$ となる $y \in Y$ が唯一つ存在するとき，f を X から Y への**写像**または**函数**と言う．f は U に属する．$f(x)=y$ と書く．

2)　f が U に属する函数で，x が f の定義域に属するとき，f の x での値 $f(x)$ のことを $f \operatorname{ap} x$ とも書く（ap は applied to の略）．さらに，x が f の定義域に属さないとき，およびそもそも f が函数でないときには $f \operatorname{ap} x = \varnothing$ と定める．こうして，U の任意の元 x, y に対して $x \operatorname{ap} y$ が定義され

た．これは，このあと述べる形式言語による書法を簡単にするための便法である．ap は U の元ではない．

例　$\boldsymbol{R} \in U$ とする．実数の加法は $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像，すなわち，$(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{R}$ の部分集合である．これを $+$ と書く（$+$ は U の元）．また，余弦函数 cos は $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ の部分集合である．実数 x, y に対し，$x+y$ は $+\mathrm{ap}(x \,\mathrm{pr}\, y)$ と書ける．$\cos x$ は $\cos \mathrm{ap}\, x$，$\cos(x+y)$ は $\cos \mathrm{ap}(+\mathrm{ap}(x \,\mathrm{pr}\, y))$ と書ける．

3)　X, J を U に属する集合とする．J から X への写像の全体 ${}^J X$ は U に属する．実際，$f \in {}^J X$ なら $f \subset J \times X$．よって ${}^J X \subset \mathscr{P}(J\times X) \in U$.

4)　J, W を U に属する集合とし，F を J から W への写像とする（$F\in U$）．各 $j \in J$ に対して $F(j)=X_j \in W$ が集合のとき，F を，J を添字域とする集合族と言い，$\{X_j\,;\, j\in J\}$ と書く．このとき，J から $\bigcup W$ への写像 f で，$f(j)\in X_j$ なるもの（選択函数）の全体を，集合族 $\{X_j\,;\, j\in J\}$ の**直積**と言い，$\prod_{j\in J} X_j$ と書く．これも U に属する．どの X_j も空集合でなければ，直積も空でない（選択公理）．

注意　U を宇宙，$\{X_i\,;\, i\in J\}$ を U に属する集合から成る族とする．$J \in U$ であっても，$\bigcup_{i\in J} X_i$ や $\prod_{i\in J} X_i$ は U に属するとは限らない．ここまで要請するのがブルバキないしグロタンディックの宇宙である†．この方が明らかに都合がよいが，この意味の宇宙は，$V=\varnothing$ から出発して命題 **2.1.5** のように構成した U（U の元はすべて有限集合）以外は存在が証明できない．

§2　言　　語

言　語 $\mathscr{L}$

一般に形式言語とは，アルファベットと称する有限個または無限個の記号の有限列から成る集合のことである．宇宙 U に対して形式言語 $\mathscr{L}$ を構成する．

2.2.1　定義　1)　記号の集合 $\mathscr{C}$ および $\mathscr{C}$ から U への双射 ι があると

† SGA 4《Théorie des topos et cohomologie étale des schémas》, Springer Lecture Notes in Math. **269** (1972) を見よ．

する（ι は双射でなくても，上射であればよいが，簡単のために双射とする）．$\mathscr{C}$ の元を**定項**または対象記号と言う．はじめのうちは定項を表わすのに a, b, c, a_1, a_2, … 等を使う．しかし，そのうちに $\mathscr{C}$ と U とを同一視し，U の元を表わす記号をそのまま定項の記号に流用する（0, 1, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}$ 等）．

2)　記号の可算集合 $\mathscr{V}$．$\mathscr{V}$ の元を**変項**と言う．$\mathscr{C}\cap\mathscr{V}=\varnothing$ とする．$\mathscr{V}$ の元は，なるべく x, y, x_1, x_2 等を使うが，あとの方では厳密には守らない．

3)　$\mathscr{L}$ のアルファベットはつぎの七種類のものとする：（1）定項．（2）変項．（3）**函数記号**と称する二つの記号 pr および ap（これらは，たとえば二つの記号 p と r との列ではなく，一体となった一つの記号である）．（4）**述語記号**と称する二つの記号 $=$ および $\in$．（5）**論理**（**結合**）**記号**と称する二つの記号 $\neg$, $\wedge$．（6）**存在記号**と称する記号 $\exists$（7）括弧記号と称する二つの記号 [,]．以上．

これらの記号の潜在的意味を先に知りたければ，**2.2.4〜8** を見よ．

2.2.2　定義　**項**（term）というものをつぎのように定義する．1）定項は項である．2）変項は項である．3）t, s が項ならば，[t]pr[s] および [t]ap[s] は項である．4）以上でできるものだけが項である．

2.2.3　定義　[t]=[s] および [t]∈[s]（t, s は項）を**原子論理式**（atomic formula）と言う．

論理式（formula）または整合論理式（well-formed formula）というものをつぎのように定義する．

1)　原子論理式は論理式である．

2)　ϕ が論理式のとき，$\neg[\phi]$ は論理式である．

3)　ϕ, ψ が論理式のとき，$[\phi]\wedge[\psi]$ は論理式である．

4)　ϕ が論理式のとき，$\exists x[\phi]$ は論理式である．ただし，x は変項で，$\exists x$ は記号列 ϕ の中に現われないものとする．

5)　以上でできるものだけが論理式である．以上．

論理式の全体を $\mathscr{L}$ と書く．

2.2.4　つぎの略記号を導入する．ϕ, ψ は論理式である．

1) $[\phi]\vee[\psi]$ は $\neg[[\neg[\phi]]\wedge[\neg[\psi]]]$ の略形.

2) $[\phi]\rightarrow[\psi]$ は $[\neg[\phi]]\vee[\psi]$ (これもすでに略形) の略形.

3) $[\phi]\leftrightarrow[\psi]$ は $[[\phi]\rightarrow[\psi]]\wedge[[\psi]\rightarrow[\phi]]$ (これもすでに略形) の略形.

4) $\forall x[\phi]$ は $\neg[\exists x[\neg[\phi]]]$ の略形.

記号 $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ は，略記号と見るよりは本来的記号として導入する方が普通でもあり，自然でもある．ここでは，あとの諸定義や証明を簡単にするために素直でない便法を選んだ．$\neg, \wedge$ のほか，$\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ はどれも**論理(結合)記号**と言う．$\forall$ は**全称記号**，$\exists$ と $\forall$ とを合わせて**量記号** (quantifier) または限定記号と言う．

これらの記号はいまのところ無意味な記号だが，念頭にある意味はつぎのとおりである：$\neg[\phi]$ は《ϕ でない》，$[\phi]\wedge[\psi]$ は《ϕ かつ ψ》，$[\phi]\vee[\psi]$ は《ϕ または ψ》，$[\phi]\rightarrow[\psi]$ は《ϕ ならば ψ》，$[\phi]\leftrightarrow[\psi]$ は《ϕ と ψ とは同値》，$\exists x[\phi]$ は，《ある x に対して ϕ》，$\forall x[\phi]$ は《あらゆる x に対して ϕ》である．

2.2.5 定義　1) 論理式 ϕ の中に $\exists x$ または $\forall x$ が現われるとき，x は (ϕ の中で) **束縛変項** (bound variable) であると言う．変項 x が ϕ に現われ，$\exists x$ も $\forall x$ も現われないとき，x は (ϕ の中で) **自由変項** (free variable) であると言う．

2) 自由変項のない論理式を**文** (sentence) または**閉論理式** (closed formula) と言う．あとで述べる論理式の解釈を先取りして言えば，文は U におけるある定まった命題を表わす．一つしか自由変項のない論理式 ϕ を**一変項論理式** (unary formula) と言う．その自由変項が x であるとき，ϕ を $\phi(x)$ と書くことがある．文も特別な一変項論理式とみなしておく方が便利である (定数も特別な一変数函数とみなすたぐい)．一般に n 個しか自由変項のない論理式 ϕ を n 変項論理式 (n-ary formula) と言う．その変項が $x_1, \cdots, x_n$ のとき，ϕ を $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ と書くことがある．上と同様，$m\leqq n$ のとき，m 変項論理式は n 変項論理式とみなす．

3) $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ を n 変項論理式，$a_1, \cdots, a_n$ を定項とする．ϕ の中のいく

つかの x_i をすべて a_i で置きかえることを，x_i に a_i を**代入**すると言う．たとえば，$x_1, \cdots, x_m$ ($m \leqslant n$) に $a_1, \cdots, a_m$ を代入して得られる論理式を $\phi(a_1, \cdots, a_m, x_{m+1}, \cdots, x_n)$ と書く．自由変項全部に定項を代入して得られる論理式 $\phi(a_1, \cdots, a_n)$ は文である．

2.2.6　注意　　括弧記号は，普通に使われる括弧としての意味しかもたない．だから，誤解の恐れのない限り省略する．その原則はつぎのとおりである．

1)　結合力は函数記号がもっとも強く，つぎが述語記号，最後が論理記号である．論理記号の中では $\neg$ が最強，つぎが $\wedge$ および $\vee$，最弱が $\rightarrow$ および $\leftrightarrow$ である．たとえば，$a = x \text{ pr } b \rightarrow \neg y \in c \wedge d = z$ は

$$[[a] = [[x] \text{ pr } [b]]] \rightarrow [[\neg[[y] \in [c]]] \wedge [[d] = [z]]]$$

の省略形である．

2)　$\exists x[\phi]$ および $\forall x[\phi]$ は，ϕ の先頭に $\exists$ または $\forall$ があれば括弧を省略し，そうでなければ省略しない．たとえば，$\forall x \exists y[x \in y]$，$\forall x[x \in a \rightarrow y = b]$ 等．

論理式の解釈と文の真偽

宇宙 U，$\mathscr{C}$ から U への双射 ι，帰属関係 $\in$，さらに pr, ap を合わせた五つ組 $(U, \iota, \in, \text{pr}, \text{ap})$ を $\mathscr{U}$ と書く．$\mathscr{L}$ の文が $\mathscr{U}$ で解釈したとき**真** (true) ないし**偽** (false) であるということを，論理式の定義 **2.2.3** に従ってつぎのように段階的に定義する．

2.2.7　　まず定項 a を U の元 $\iota(a)$ と解釈する．函数記号 pr, ap はそれぞれ pr, ap と解釈する．これにより，変項を含まない項（これを閉項と言う）は U のある元を表わす．

つぎに述語記号 $=, \in$ はそれぞれ相等関係 $=$，帰属関係 $\in$ と解釈する．これにより，原子文すなわち変項を含まない原子論理式 ϕ は，U の二つの元 a, b の間の相等関係 $a = b$ または帰属関係 $a \in b$ を表わす．こう解釈した関係が成りたつとき，原子文 ϕ は $\mathscr{U}$ で真であると言う．ϕ が $\mathscr{U}$ で真でないとき，ϕ は $\mathscr{U}$ で偽であると言う．

2.2.8　一般の文に対しては，論理記号，量記号とも普通のとおりに解釈し，束縛変項の変域を U とすればよいのだが，厳密にはつぎの手続きによる．

$\phi(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ を論理式とし，その変項全部に定項を代入して得られる文 $\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n)$ の真偽をつぎのように定義する．

1)　ϕ が原子論理式なら，$\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n)$ の真偽はすでに定まっている．

2)　定項 $\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n$ に対して $\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n)$ が真〘偽〙のとき，$\neg\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n)$ は $\mathscr{U}$ で偽〘真〙とする．

3)　定項 $\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n$ に対して $\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n)$，$\psi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n)$ がともに真のとき，$\phi\wedge\psi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n)$ は真，それ以外のとき偽とする．

4)　$\exists\mathrm{x}[\phi]$ が n 変項論理式なら，ϕ は $n+1$ 変項論理式 $\phi(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n, \mathrm{x})$ である．$\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n$ を定項とする．ある定項 b に対して $\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n, \mathrm{b})$ が $\mathscr{U}$ で真のとき，文 $\exists\mathrm{x}[\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n, \mathrm{x})]$ は真，そうでないとき，すなわちどんな定項 b に対しても $\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n, \mathrm{b})$ が偽のとき，$\exists\mathrm{x}[\phi(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n, \mathrm{x})]$ は偽とする．

以上により，$\mathscr{L}$ の任意の文は，$\mathscr{U}$ で解釈したとき，真または偽の，定まった命題を表わす．文 ϕ が $\mathscr{U}$ で真のとき，$\models\phi$ と書く．

注意　もちろんこれは超越的な立場から言っているのであって，何等かの手段によって，ある文の $\mathscr{U}$ での真偽が決定できることを主張するのではない（付録IIを見よ）．

論理式の例および略記法

以後，本書を通じて $\boldsymbol{N}$ は U に属すると仮定する．

2.2.9　例　以下，論理式とその解釈を例示する．定項 a と U の元 $\iota(\mathrm{a})$ とは区別しない．$0, 1, \boldsymbol{N}$ のほか，加法 $+$，乗法 $\cdot$，大小関係 $\leqslant, <$ 等は U の元だから，これを定項として使う．

1)　$\mathrm{x}\in\mathrm{a}$，$\mathrm{a}=\mathrm{a}$，$\mathrm{a}\in\mathrm{a}$. はじめのものは文でない．二番目は真の文，最後のは偽の文である．

2)　$+\mathrm{ap}[3\ \mathrm{pr}\ 5]=\cdot\mathrm{ap}[2\ \mathrm{pr}\ 4]$. これは原子文で，$3+5=2\cdot4$ を表わすから

真である.

3)　x pr y∈≦. このココロは $(x, y)\in\leqq$, すなわち $x\leqq y$ である. この二変項論理式を x≦y と略記する. x<y も同様.

4)　x∈**N**∧x>1∧∀y∀z[y∈**N**∧y>1∧z∈**N**∧z>1→¬x=·ap[y pr z]]. これは x を自由変項としてもつ一変項論理式である. これを P(x) と略記しよう. そのココロは,《x は 1 より大きい自然数であり, y, z が 1 より大きい自然数なら $x=y\cdot z$ とならない》, すなわち x が素数であることを表わす.

5)　∀x[x∈**N**→∃y[P(y)∧x<y]]. これは文であり, どんな自然数に対しても, それより大きい素数が存在することを表わす. したがって真である.

6)　∀x[x∈**N**∧x≧3→∃y∃z[P(y)∧P(z)∧·ap[2 pr x]=+ap[y pr z]]]. これも文である. ココロは,《3 以上の任意の自然数 x に対して, $2x=y+z$ となる素数 y, z が存在する》, すなわちゴールドバッハの問題を表わす.

2.2.10　上の例からも分るように, 正直に論理式を書くとひどく長くなり, しかも分りにくい. そこで, いろいろな略記法を採用する. すでに, x pr y∈≦ は x≦y と略記した.

1)　s≠t, s∉t はそれぞれ ¬[s=t], ¬[s∈t] の略記である.

2)　x=∅∨∃y[y∈x] は,《x が集合である》ことを表わすから, これを x(set) と略記する. さらに, ∃x[x(set)∧ϕ(x)] は ∃x(set)[ϕ(x)] と略記し, ∀x[x(set)→ϕ(x)] は ∀x(set)[ϕ(x)] と略記する.

3)　∃!x[ϕ(x)] は ∃x[ϕ(x)]∧∀y∀z[ϕ(y)∧ϕ(z)→y=z] の略記である. すなわち, 一意存在を表わす.

4)　x⊂y は x(set)∧y(set)∧∀z[z∈x→z∈y] の略記である.

5)　x pr y を (x, y) と書くこともある. また, 函数の記号も一々 ap を使わずに慣用に従うことがある. たとえば +ap[x pr y] のかわりに x+y.

6)　x(set)∧y(set)∧z(set)∧∀w[w∈z→∃u∃v[u∈x∧v∈y∧u pr v=w]]∧∀u_1[u_1∈x→∃!v_1[u_1 pr v_1∈z]] は,《z は x から y への写像である》というココロである. これを z(map : x→y) と略記する. そのほかこれと同様に, z(bijection : x→y) 等の略記法も使う.

§3 標準モデルと超準モデル

$\mathscr{U}=(U, \iota, \in, \mathrm{pr}, \mathrm{ap})$ および言語 $\mathscr{L}$ は前節のとおりとする.

$\mathscr{L}$ 系とモデル

2.3.1 定義 五つ組 $^*\mathscr{U}=(^*U, ^*\iota, ^*\in, ^*\mathrm{pr}, ^*\mathrm{ap})$ を $\mathscr{L}$ 系 ($\mathscr{L}$-system) と言う. ただし, $^*U$ は空でない集合, $^*\iota$ は $\mathscr{C}$ から $^*U$ への写像, $^*\in$ は $^*U$ の二項関係, すなわち $^*U\times{}^*U$ の部分集合, $^*\mathrm{pr}$ および $^*\mathrm{ap}$ は $^*U\times{}^*U$ から $^*U$ への写像とする.

$\mathscr{U}=(U, \iota, \in, \mathrm{pr}, \mathrm{ap})$ は $\mathscr{L}$ 系である.

$\mathscr{L}$ 系 $^*\mathscr{U}$ では $\mathscr{L}$ の論理式が解釈できる. すなわち, 定項 a は $^*U$ の元 $^*\iota(\mathrm{a})$, 函数記号 pr, ap はそれぞれ $^*\mathrm{pr}$, $^*\mathrm{ap}$, 述語記号のうち $=$ は常に相等関係とし, $\in$ は $^*\in$ と解釈する. 論理記号, 量記号はいつものとおりとする. ただし, **束縛変項の変域は $^*U$ とする**. $^*\mathscr{U}$ での解釈を《＊解釈》, $^*\mathscr{U}$ で真ということを《＊真》と略称する.

$\mathscr{U}$ の場合と同様, $\mathscr{L}$ の文を $^*\mathscr{U}$ で解釈したときに真ないし偽であるということが定義され, $\mathscr{L}$ の任意の文は $^*\mathscr{U}$ で真または偽の定まった命題を表わす. $\mathscr{L}$ の文 ϕ が $^*\mathscr{U}$ で真であることを $^*\vDash\phi$ と略記する.

2.3.2 定義 $\mathscr{L}$ の文で, $\mathscr{U}$ で真なるものの全体を $\mathscr{K}$ と書く. $^*\mathscr{U}$ を $\mathscr{L}$ 系とする. $\mathscr{K}$ の任意の文 ϕ が $^*\mathscr{U}$ で真であるとき, $^*\mathscr{U}$ を $\mathscr{K}$ の**モデル** (model) と言う. 今後 $\mathscr{K}$ 以外のもののモデルは考えないから, $\mathscr{K}$ のモデルを単にモデルと言う. $\mathscr{U}$ はモデルである.

2.3.3 定理 $^*\mathscr{U}$ をモデルとする. $\mathscr{L}$ の任意の文 ϕ に対し, ϕ が $\mathscr{U}$ で真であることと $^*\mathscr{U}$ で真であることとは同値である.

証明 $\vDash\phi$ なら $\phi\in\mathscr{K}$ だから, モデルの定義によって $^*\vDash\phi$. $\vDash\phi$ でなければ $\vDash\neg\phi$, よって $\neg\phi\in\mathscr{K}$. したがって $^*\vDash\neg\phi$, すなわち ϕ は $^*\mathscr{U}$ で真でない. ∎

注意 この定理は超準解析で決定的な役割を果す. 以後これを《**モデル**

同値の原理》と名付けて引用する．

2.3.4　定義　$°\mathscr{U}=(°U, °\iota, °\in, °\mathrm{pr}, °\mathrm{ap})$ および $*\mathscr{U}=(*U, *\iota, *\in, *\mathrm{pr}, *\mathrm{ap})$ を $\mathscr{L}$ 系とする．

1)　$°U$ から $*U$ への写像 Δ がつぎの条件をみたすとき，Δ を $°\mathscr{U}$ から $*\mathscr{U}$ への**単型射** (monomorphism) と言う：

a)　Δ は単射である．

b)　任意の定項 a に対し，$\Delta(°\iota(\mathrm{a}))=*\iota(\mathrm{a})$.

c)　$°U$ の元 a, b に対し，$a\,°\!\in b \Leftrightarrow \Delta(a)\ *\!\in \Delta(b)$.

d)　$°U$ の元 a, b に対し，$\Delta(a\ °\mathrm{pr}\ b)=\Delta(a)\ *\mathrm{pr}\ \Delta(b)$，$\Delta(a\ °\mathrm{ap}\ b)=\Delta(a)\ *\mathrm{ap}\ \Delta(b)$.

2)　単型射 Δ がとくに $°U$ から $*U$ への双射であるとき，Δ を $°\mathscr{U}$ から $*\mathscr{U}$ への**同型射** (isomorphism) と言う．$°\mathscr{U}$ から $*\mathscr{U}$ への同型射が存在するとき，$°\mathscr{U}$ と $*\mathscr{U}$ とは（$\mathscr{L}$ 系として）**同型**であると言う．

2.3.5　定義　$\mathscr{U}$ と同型なモデルを**標準モデル** (standard model)，$\mathscr{U}$ と同型でないモデルを**超準モデル** (non-standard model) と言う．

2.3.6　命題　1)　任意のモデル $*\mathscr{U}$ に対し，$\Delta=*\iota\circ\iota^{-1}$ は $\mathscr{U}$ から $*\mathscr{U}$ への単型射である．とくに $*\iota:\mathscr{C}\rightarrow *U$ は単射である．

2)　$*\mathscr{U}$ が標準モデルであるのは Δ が上射のときである．それはまた $*\iota$ が上射のときでもある．

証明　1)　$a, b\in U$，$a\neq b$ とする．$\mathrm{a}=\iota^{-1}(a)$，$\mathrm{b}=\iota^{-1}(b)$ とすると，文 $\mathrm{a}\neq\mathrm{b}$ は $\mathscr{U}$ で真，したがって $*\mathscr{U}$ で真，よって $\Delta(a)\neq\Delta(b)$．その他の条件も簡単に確かめられる．2) はなおやさしい．∎

2.3.7　**言語の拡大**．$*\mathscr{U}$ を $\mathscr{L}$ 系とする．$*U-*\iota(\mathscr{C})$ の各元に対応する記号を $\mathscr{C}$ に付加えて $*\mathscr{C}$ とする．こうして $*\iota:\mathscr{C}\rightarrow *U$ を $*\mathscr{C}$ から $*U$ への双射に延長し，これも同じ記号 $*\iota$ で表わす．こうして得られる言語（定項以外には手を加えない）を $*\mathscr{L}$ とする．$*\mathscr{L}$ の論理式は（$*\iota$ によって）$*\mathscr{U}$ で解釈でき，$*\mathscr{L}$ の文は $*\mathscr{U}$ で真または偽の命題を表わす．$*\mathscr{L}$ の文 ϕ が $*\mathscr{U}$ で真であることをやはり《$*$真》と言い，$*\models\phi$ と書く．

$\mathscr{U}$ の諸概念を $^*\mathscr{U}$ へ移すこと

2.3.8 定義 $^*\mathscr{U}$ をモデルとする．$^*\iota(\mathscr{C})=\Delta(U)$ の元を（$^*U$ の）**標準元** (standard element)，そうでない $^*U$ の元を**超準元** (non-standard element) と言う．標準元は $\Delta(a)$ ($a\in U$) の形である．これを $^*a$ と書く．

2.3.9 命題 $^*\mathscr{U}$ がモデルのとき，$\mathscr{U}$ の諸概念をつぎのようにして $^*\mathscr{U}$ に移すことができる．

1) 一変項論理式 $\phi(\mathsf{x})$: $\mathsf{x}=\emptyset\vee\exists\mathsf{y}[\mathsf{y}\in\mathsf{x}]$ は《x は集合》ということだった．これを＊解釈したものを**＊集合**という．すなわち，$^*U$ の元 α が＊集合であるとは $\phi(\alpha)$ が＊真ということである．すなわち，$\alpha={}^*\emptyset$ であるか，または $\beta\,{}^*\!\in\alpha$ であるような $^*U$ の元 β が存在する，ということである．$^*U$ の元 α,β に対し，$\alpha\,{}^*\!\subset\beta$ は，α,β が＊集合で，$\xi\,{}^*\!\in\alpha$ なら $\xi\,{}^*\!\in\beta$ となることを表わす．

$\alpha,\beta\in{}^*U$, $\alpha\,{}^*\!\subset\beta$, $\beta\,{}^*\!\subset\alpha$ なら $\alpha=\beta$ となる（＊外延性）．実際，$\mathscr{L}$ の文 $\forall\mathsf{x}(\mathsf{set})\forall\mathsf{y}(\mathsf{set})[\mathsf{x}=\mathsf{y}\longleftrightarrow[\mathsf{x}\subset\mathsf{y}\wedge\mathsf{y}\subset\mathsf{x}]]$ は真だから，モデル同値の原理により，これを＊解釈すればよい．

2) $a,b\in U$ とする． $a=b\iff{}^*a={}^*b$. $a\in b\iff{}^*a\,{}^*\!\in{}^*b$. $a\subset b\iff{}^*a\,{}^*\!\subset{}^*b$.

3) $^*U$ の元 α,β に対し，＊集合 γ で，任意の $\xi\in{}^*U$ に対して

$$\xi\,{}^*\!\in\gamma\iff\xi=\alpha \text{ または } \xi=\beta$$

となるものが唯一つ存在する．これを $^*\{\alpha,\beta\}$ と書く．実際，$\mathscr{L}$ の文 ϕ：

$$\forall\mathsf{x}\forall\mathsf{y}\exists!\mathsf{z}(\mathsf{set})[\forall\mathsf{w}[\mathsf{w}\in\mathsf{z}\longleftrightarrow\mathsf{w}=\mathsf{x}\vee\mathsf{w}=\mathsf{y}]]$$

は $\mathscr{U}$ で真である ($a,b\in U\Rightarrow\{a,b\}\in U$)． モデル同値の原理によって ϕ は $^*\mathscr{U}$ で真．上の主張は ϕ を＊解釈したものにほかならない．同様に，$^*U$ の元 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ に対し，$^*\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ が定まる．とくに $a_1,\cdots,a_n$ が U の元ならば，$^*(\{a_1,\cdots,a_n\})={}^*\{{}^*a_1,\cdots,{}^*a_n\}$．無限個の元に対してはこれは成立たない．

4) $^*U$ の元 α,β に対し，$\alpha\,{}^*\mathrm{pr}\,\beta={}^*\{{}^*\{\alpha\},{}^*\{\alpha,\beta\}\}$．実際，$\mathscr{L}$ の文

$$\forall\mathsf{x}\forall\mathsf{y}\forall\mathsf{z}[\mathsf{z}\in\mathsf{x}\ \mathsf{pr}\ \mathsf{y}\longleftrightarrow\mathsf{z}(\mathsf{set})\wedge [\forall\mathsf{u}[\mathsf{u}\in\mathsf{z}\longleftrightarrow\mathsf{u}=\mathsf{x}]\vee\forall\mathsf{v}[\mathsf{v}\in\mathsf{z}\longleftrightarrow\mathsf{v}=\mathsf{x}\vee\mathsf{v}=\mathsf{y}]]]$$

は $\mathscr{U}$ で真である（《$c\in(a,b)\iff c=\{a\}$ または $c=\{a,b\}$》を表わす）．モデ

ル同値の原理によってこれを＊解釈すればよい．とくに，《$\alpha\,{}^*\mathrm{pr}\,\beta=\gamma\,{}^*\mathrm{pr}\,\delta \Longleftrightarrow \alpha=\gamma$ かつ $\beta=\delta$》が成立つ．だから，$\alpha\,{}^*\mathrm{pr}\,\beta$ を $^*(\alpha,\beta)$ または単に (α,β) と書く．

$a, b\in U$ に対し，$^*((a,b))={}^*({}^*a, {}^*b)$.

5)　＊集合 α,β に対し，＊集合 γ で，任意の $\zeta\in{}^*U$ に対して《$\zeta\,{}^*\!\in\gamma \Longleftrightarrow \zeta={}^*(\xi,\eta)$，$\xi\,{}^*\!\in\alpha$，$\eta\,{}^*\!\in\beta$》の成立つものが唯一つ存在する（＊直積）．これを $\alpha\,{}^*\!\times\beta$ と書く．

a, b が集合で U の元なら，$^*(a\times b)={}^*a\,{}^*\!\times{}^*b$.

6)　$\mathscr{L}$ の文 $\forall \mathrm{x}\exists!\mathrm{y}(\mathrm{set})\forall \mathrm{z}[\mathrm{z}\in\mathrm{y}\longleftrightarrow \exists \mathrm{w}[\mathrm{w}\in\mathrm{x}\wedge \mathrm{z}\in\mathrm{w}]]$，すなわち合併の公理を＊解釈することにより，$^*U$ の任意の元 α に対し，＊集合 β で，任意の $\xi\in{}^*U$ に対し，《$\xi\,{}^*\!\in\beta \Longleftrightarrow$ ある $\eta\in{}^*U$ があって $\xi\,{}^*\!\in\eta$，$\eta\,{}^*\!\in\alpha$》なるものが唯一つ存在することが分る．これを $^*\bigcup\alpha$ と書く．

とくに $a\in U$ に対し，$^*\left(\bigcup a\right)={}^*\bigcup{}^*a$.

7)　$\mathscr{L}$ の文 $\forall \mathrm{x}\exists!\mathrm{y}(\mathrm{set})\forall \mathrm{z}[\mathrm{z}\in\mathrm{y}\longleftrightarrow \mathrm{z}\subset\mathrm{x}]$，すなわち冪集合の公理を＊解釈することにより，任意の $\alpha\in{}^*U$ に対し，＊集合 β で，α の＊部分集合の全部が＊元の全部であるようなものが唯一つ存在する．これを $^*\mathscr{P}(\alpha)$ と書く．

とくに $a\in U$ なら，$^*(\mathscr{P}a)={}^*\mathscr{P}({}^*a)$.

8)　その他，$\mathscr{L}$ の言葉で定義される $\mathscr{U}$ の概念は，すべて同様に $^*\mathscr{U}$ の概念に移される（＊関係，＊写像，＊双射等）．

2.3.10　定理（＊分出性）　$\phi(x)$ を $^*\mathscr{L}$ の一変項論理式，α を＊集合とする．これに対し，＊集合 β で，任意の $\xi\in{}^*U$ に対し，

$$\xi\,{}^*\!\in\beta \Longleftrightarrow \xi\,{}^*\!\in\alpha \text{ かつ } {}^*\models\phi(\xi)$$

となるものが唯一つ存在する．これを $^*\{\xi\,{}^*\!\in\alpha\,;\,\phi(\xi)\}$ と書く．

証明　ϕ に現われる定項で $\mathscr{C}$ に属さないもの（$^*\mathscr{C}$ の元）全部を $\mathrm{c}_1,\cdots,\mathrm{c}_n$ とし，それらを ϕ に現れない変項 $\mathrm{z}_1,\cdots,\mathrm{z}_n$ で置きかえると，$\mathscr{L}$ の論理式 $\phi(\mathrm{x},\mathrm{z}_1,\cdots,\mathrm{z}_n)$ が得られる．$\mathscr{L}$ の文

$$\forall \mathrm{z}(\mathrm{set})\forall \mathrm{z}_1\cdots\forall \mathrm{z}_n\exists!\mathrm{y}(\mathrm{set})\forall \mathrm{x}[\mathrm{x}\in\mathrm{y}\longleftrightarrow \mathrm{x}\in\mathrm{z}\wedge\phi(\mathrm{x},\mathrm{z}_1,\cdots,\mathrm{z}_n)]$$

は $\mathscr{U}$ で真である（分出公理および《$z\in U$，$y\subset z \Longrightarrow y\in U$》による）．した

がって，モデル同値の原理により，(z を α，z_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ を $\gamma_i={}^*\iota(c_i)$ として) $^*\mathscr{L}$ の文

$$\exists!\mathrm{y}(\mathrm{set})\forall\mathrm{x}[\mathrm{x}\in\mathrm{y}\longleftrightarrow\mathrm{x}\in\alpha\wedge\phi(\mathrm{x})]$$

は $^*\mathscr{U}$ で真である．これが定理にほかならない．▮

2.3.11 例（＊帰納法）　$N\in U$ と仮定してある．

1)　N の空でない部分集合には最小元が存在するから，文

$$\forall\mathrm{x}[\mathrm{x}\subset\boldsymbol{N}\wedge\mathrm{x}\neq\varnothing\rightarrow\exists\mathrm{y}[\mathrm{y}\in\mathrm{x}\wedge\forall\mathrm{z}[\mathrm{z}\in\mathrm{x}\rightarrow\mathrm{y}\leqslant\mathrm{z}]]]$$

は真，したがって＊真である．すなわち，$^*\boldsymbol{N}$ の＊空でない＊部分集合には＊最小＊元が存在する．

2)　$^*\mathscr{L}$ の任意の一変項論理式 $\phi(\mathrm{x})$ に対し，$^*\mathscr{L}$ の文

$$[\phi(0)\wedge\forall\mathrm{x}[\mathrm{x}\in\boldsymbol{N}\wedge\phi(\mathrm{x})\rightarrow\phi(\mathrm{x}+1)]]\rightarrow\forall\mathrm{y}[\mathrm{y}\in\boldsymbol{N}\rightarrow\phi(\mathrm{y})]$$

は＊真である．すなわち，$\phi({}^*0)$ が＊真であり，《$\phi(\nu)$ $(\nu\,{}^*\!\!\in{}^*\boldsymbol{N})$ が＊真なら $\phi(\nu\,{}^*\!\!+{}^*1)$ も＊真》ならば，あらゆる $\nu\,{}^*\!\!\in{}^*\boldsymbol{N}$ に対して $\phi(\nu)$ は＊真である．

証明　定理 **2.3.10** により，$^*\boldsymbol{N}$ の＊部分集合 β で，任意の $\nu\,{}^*\!\!\in{}^*\boldsymbol{N}$ に対して《$\nu\,{}^*\!\!\in\beta\Longleftrightarrow{}^*\!\models\neg\phi(\nu)$》なるものが存在する．結論を否定すると，$\beta$ は＊空でないから，＊最小元 λ が存在する．$\lambda\neq{}^*0$，${}^*\!\models\phi(\lambda\,{}^*\!\!-{}^*1)$，したがって ${}^*\!\models\phi(\lambda)$．矛盾．▮

注意　この例の記述から分るように，あまりにも正直に＊を付けるとかえってわずらわしい．今後，誤解の恐れのないときには，用語も記号も＊を省略することがある．たとえば $^*1\,{}^*\!\!+{}^*2={}^*3$ のかわりに $1+2=3$.

§4　超 冪 モ デ ル

超冪によって超準モデルを作る．

2.4.1 定義　$\mathscr{U}=(U,\iota,\in,\mathrm{pr},\mathrm{ap})$ を標準モデルとし，I を無限集合（U の元とは限らない），$\mathscr{F}$ を I 上の自由超フィルターとする．U の $\mathscr{F}$ を法とする超冪 $\prod_{\mathscr{F}}U$ を $^*U$ とし，定項 $\mathrm{a}\in\mathscr{C}$ に対し，$^*\iota(\mathrm{a})=[\iota(\mathrm{a})]\in{}^*U$ と置く．さらに，$^*U$ の元 $\alpha=[\alpha(i)]$，$\beta=[\beta(i)]$ に対し，$\{i\in I\,;\,\alpha(i)\in\beta(i)\}\in\mathscr{F}$

のとき，$\alpha\,{}^*\!\in\beta$ と定義する. また，$\alpha\,{}^*\mathrm{pr}\,\beta=[\alpha(i)\mathrm{pr}\,\beta(i)]$ と置き，$\alpha\,{}^*\mathrm{ap}\,\beta=[\alpha(i)\mathrm{ap}\,\beta(i)]$ と置く. これらはすべてうまく定義される. こうしてできる $\mathscr{L}$ 系 ${}^*\mathscr{U}=({}^*U, {}^*\iota, {}^*\!\in, {}^*\mathrm{pr}, {}^*\mathrm{ap})$ を $\mathscr{U}$ の超冪 $\mathscr{L}$ 系と言う. U は無限集合だから，命題 **1.2.2** により，${}^*\iota$ は上射でない.

2.4.2　これから ${}^*\mathscr{U}$ がモデルであること，すなわち $\mathscr{L}$ の文 ϕ が $\mathscr{U}$ で真なら ${}^*\mathscr{U}$ でも真であることを示すのだが，後の便宜のために多少一般的な形の定理を証明する.

そのための準備として，${}^*U$ の各元 α ($\mathscr{F}$ を法とする同値類)に対し，その代表 (${}^IU$ の元) を一つ選んで固定する. これは選択公理によって可能である. よって各 $i\in I$ に対して $\alpha(i)$ が定まる.

拡大された言語 ${}^*\mathscr{L}$ の項 t に対し，t に現われるすべての定項 α を $\alpha(i)$ で置きかえると $\mathscr{L}$ の項が得られる. これを t_i と書く. 同様に，${}^*\mathscr{L}$ の論理式 ϕ に対し，ϕ に現われるすべての定項 α を $\alpha(i)$ で置きかえると $\mathscr{L}$ の論理式 ϕ が得られる. これを ϕ_i と書く.

${}^*\mathscr{L}$ の項 t, s に対し，$(\mathsf{t}\ \mathrm{pr}\ \mathsf{s})_i$ は $\mathsf{t}_i\ \mathrm{pr}\ \mathsf{s}_i$，$(\mathsf{t}\ \mathrm{ap}\ \mathsf{s})_i$ は $\mathsf{t}_i\ \mathrm{ap}\ \mathsf{s}_i$ である.

${}^*\mathscr{L}$ の論理式 ϕ, ψ に対し，$(\neg\phi)_i$ は $\neg\phi_i$，$(\phi\wedge\psi)_i$ は $\phi_i\wedge\psi_i$，$(\exists \mathsf{x}[\phi(\mathsf{x})])_i$ は $\exists \mathsf{x}[\phi_i(\mathsf{x})]$ である.

2.4.3　定理（ウォッシュ）　${}^*\mathscr{L}$ の n 変項論理式 $\phi(\mathsf{x}_1, \cdots, \mathsf{x}_n)$ および ${}^*U$ の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対し，文 $\phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ が＊真〘＊偽〙であるためには，$(\phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n))_i$ すなわち $\phi_i(\alpha_1(i), \cdots, \alpha_n(i))$ が真〘偽〙であるような i の全体が $\mathscr{F}$ に属することが必要十分である.

証明　論理式の定義 **2.2.3** にしたがって段階的に証明する. 式を短かくするためにベクトル記法を使う. すなわち，$(\mathsf{x}_1, \cdots, \mathsf{x}_n)$ を $\mathbf{x}$，$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を $\boldsymbol{\alpha}$ と書くことにする. $\boldsymbol{\alpha}(i)$ は $(\alpha_1(i), \cdots, \alpha_n(i))$ を表わす.

1°　ϕ が原子論理式なら，ϕ は $\mathsf{t}\circ\mathsf{s}$ の形である. ただし t，s は項，$\circ$ は $=$ または $\in$ の代用である. 項 t に $\mathsf{x}_1, \cdots, \mathsf{x}_n$ 以外の変項が含まれないとき，これを $\mathsf{t}(\mathbf{x})$ と書くことにすると，ϕ_i は $\mathsf{t}_i(\mathbf{x})\circ\mathsf{s}_i(\mathbf{x})$ の形である. $\mathsf{t}(\boldsymbol{\alpha})_i$ は $\mathsf{t}_i(\boldsymbol{\alpha}(i))$，$\mathsf{s}(\boldsymbol{\alpha})_i$ は $\mathsf{s}_i(\boldsymbol{\alpha}(i))$ だから，${}^*\mathscr{U}$ での ${}^*\mathrm{pr}, {}^*\mathrm{ap}, {}^*\!\in$ の定義によって定理は成立つ. 《偽》の方の証明には，超フィルターの性質《$A\subset I$ に対し，

$A \notin \mathscr{F} \Leftrightarrow I-A \in \mathscr{F}$》を使えばよい．

2° ϕ について定理が成立てば $\neg\phi$ についても成立つ．実際，

$$\neg\phi(\alpha) \text{ が*真} \Leftrightarrow \phi(\alpha) \text{ が*偽} \Leftrightarrow \{i\,;\,\phi_i(\alpha(i)) \text{ が偽}\} \in \mathscr{F}$$
$$\Leftrightarrow \{i\,;\,\neg\phi_i(\alpha(i)) \text{ が真}\} \in \mathscr{F} \Leftrightarrow \{i\,;\,(\neg\phi(\alpha))_i \text{ が真}\} \in \mathscr{F}.$$

真と偽とを取りかえてもまったく同じである．

3° ϕ, ψ について定理が成立てば $\phi\wedge\psi$ についても成立つ．実際，

$$\phi\wedge\psi(\alpha) \text{ が*真} \Leftrightarrow \phi(\alpha) \text{ が*真かつ } \psi(\alpha) \text{ が*真}$$
$$\Leftrightarrow A=\{i\,;\,\phi_i(\alpha(i)) \text{ が真}\} \in \mathscr{F} \text{ かつ } B=\{i\,;\,\psi_i(\alpha(i)) \text{ が真}\} \in \mathscr{F}$$
$$\Leftrightarrow \{i\,;\,\phi_i\wedge\psi_i(\alpha(i)) \text{ が真}\} = A\cap B \in \mathscr{F}.$$
$$\phi\wedge\psi(\alpha) \text{ が*偽} \Leftrightarrow \phi(\alpha) \text{ が*偽または } \psi(\alpha) \text{ が*偽}$$
$$\Leftrightarrow C=\{i\,;\,\phi_i(\alpha(i)) \text{ が偽}\} \in \mathscr{F} \text{ または } D=\{i\,;\,\psi_i(\alpha(i)) \text{ が偽}\} \in \mathscr{F}$$
$$\Leftrightarrow \{i\,;\,\phi_i(\alpha(i)) \text{ が偽または } \psi_i(\alpha(i)) \text{ が偽}\} = C\cup D \in \mathscr{F}$$
$$\Leftrightarrow \{i\,;\,\phi_i\wedge\psi_i(\alpha(i)) \text{ が偽}\} \in \mathscr{F}.$$

ここでも超フィルターの性質《$C\cup D \in \mathscr{F} \Rightarrow C \in \mathscr{F}$ または $D \in \mathscr{F}$》を使った．

4° ϕ について定理が成立てば $\exists \mathrm{y}[\phi]$ についても成立つ．これを ψ とする．ψ が n 変項で $\psi(\mathrm{x})$ なら，ϕ は $n+1$ 変項で $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ の形である．$\psi(\alpha)$ が*真なら，$^*U$ のある元 β に対して $\phi(\alpha, \beta)$ は*真である．仮定により，$A=\{i\,;\,\phi_i(\alpha(i), \beta(i)) \text{ が真}\} \in \mathscr{F}$．よって $i \in A$ なら文 $\exists \mathrm{y}[\phi_i(\alpha(i), \mathrm{y})]$ すなわち $\psi_i(\alpha(i))$ は真，したがって $\{i\,;\,\psi_i(\alpha(i)) \text{ が真}\} \in \mathscr{F}$．

逆に $B=\{i\,;\,\psi_i(\alpha(i)) \text{ が真}\} \in \mathscr{F}$ とする．$i \in B$ なら，$\exists \mathrm{y}[\phi_i(\alpha(i), \mathrm{y})]$ は真，よって U のある元 b_i に対して $\phi_i(\alpha(i), b_i)$ は真となる．B に属さない i に対しては $b_i=\emptyset$ と置いて $\beta=[b_i] \in {}^*U$ とする．$\beta(i)$ はすでに決まっているが，$C=\{i\,;\,\beta(i)=b_i\} \in \mathscr{F}$．よって $\{i\,;\,\phi_i(\alpha(i), \beta(i)) \text{ が真}\}$ は $B\cap C$ を含み，したがって $\mathscr{F}$ に属する．仮定により，$\phi(\alpha, \beta)$ は*真である．よって $\exists \mathrm{y}[\phi(\alpha, \mathrm{y})]$ すなわち $\psi(\alpha)$ は*真である．∎

2.4.4 系 $^*\mathscr{U}$ は超準モデルである．

証明 ϕ が $\mathscr{L}$ の論理式なら ϕ_i は ϕ 自身である（$^*U$ の標準元 $^*a=[a]$ の代表はすべて a としておく）．ϕ が真なら ϕ_i はすべて真，したがって定理によって ϕ は*真である．すなわち $^*\mathscr{U}$ はモデルである．$^*\iota$ は上射でない

(定義2.4.1を見よ) から，命題2.3.6によって $^*\mathscr{U}$ は超準モデルである. ▮

注意　1) $\mathscr{U}_i$ ($i\in I$) がすべて (標準または超準) モデルのとき，超積 $\prod_{\mathscr{F}}\mathscr{U}_i$ が定義され，やはりモデルになる. 定義2.4.1およびウォッシュの定理を機械的に拡張すればできる.

2) ウォッシュの定理の証明には，$\mathscr{F}$ が超フィルターであることしか使っていない. しかし，たとえば $\mathscr{F}$ が単項超フィルターなら，$^*\mathscr{U}$ は超準モデルにはならない.

2.4.5　注意　第一章で展開した無限小解析を我々の超冪モデルの中に移し入れることができるためには，$\boldsymbol{R}$ の超冪 $\prod_{\mathscr{F}}\boldsymbol{R}$ と $^*\mathscr{U}$ の元 $\Delta(\boldsymbol{R})=[\boldsymbol{R}]$ との間に，何等かの意味での対応がなければならない. それはつぎのようにしてできる.

一般に $\{\alpha(i)\,;\,i\in I\}$ を U に属する空でない集合の族とする. このとき，超積 $A=\prod_{\mathscr{F}}\alpha(i)$ と $^*U$ の元 $\alpha=[\alpha(i)]$ との間にはつぎの意味での対応がある. 混同を避けるために，A の元を $\langle\xi(i)\rangle$ ($\xi(i)\in\alpha(i)$) と書くことにする. A の元 $\xi=\langle\xi(i)\rangle$ に対して $^*U$ の元 $\bar{\xi}=[\xi(i)]$ を対応させる. これはうまく定義でき，$\bar{\xi}\,{}^*\!\in\alpha$ が成りたつ. $\beta\,{}^*\!\in\alpha$ なる β の全体 (普通の集合) を $\hat{\alpha}$ と書けば，写像 $\xi\mapsto\bar{\xi}$ は A から $\hat{\alpha}$ への双射である.

この対応により，α の $*$構造はすべて A に移る. しかし，逆にたとえば B が A の部分集合であっても，これに対応する α の $*$部分集合が存在するとは限らない. たとえば，第一章の意味での $^*\boldsymbol{N}$ の部分集合 $\boldsymbol{N}$ に対応する $*$集合は存在しない. このギャップは次節で扱う. この区別のおかげで，我々の方法は第一章の方法よりも精密になる.

§5　内集合と外集合

$\mathscr{U}$ を標準モデル，$^*\mathscr{U}$ を超準モデルとする. 以下，$^*U$ の元 ξ,η の順序対は $^*(\xi,\eta)$ のこととする. 順序対の定義が便宜的なものであることは前に書いた. こう定義すると，$^*(\xi,\eta)\in{}^*U$ となって都合がよい (命題2.3.9の4) を見よ). ただし，これは普通の意味での $^*U\times{}^*U$ の元でないことは注意を要する. こ

れに従い，$^*U$ の部分集合 A, B に対し，その直積 $A\times B$ は $\{^*(\xi,\eta)\,;\,\xi\in A,$ $\eta\in B\}$ として定義される．よって $A\times B\subset {}^*U$.

＊集合の領域

2.5.1 定義 ＊集合 α に対し，$^*U$ の元 ξ で $\xi\,{}^*\!\!\in\alpha$ なるものの全体を α の**領域**（scope）と言い，$\hat{\alpha}$ で表わす．これは $^*U$ の部分集合であるが，一般には $^*U$ の元でない．$^*U$ の元 ξ に対し，$\xi\in\hat{\alpha}\Longleftrightarrow\xi\,{}^*\!\!\in\alpha$.

a が U に属する集合のとき，$\hat{}\,(^*a)$ のことを $\hat{a}$ と略記する．

2.5.2 命題 ＊集合 α,β に対し，1) $\hat{\alpha}=\hat{\beta}\Longleftrightarrow\alpha=\beta$. 2) $\hat{\alpha}\subset\hat{\beta}\Longleftrightarrow$ $\alpha\,{}^*\!\!\subset\beta$. 3) $\hat{\alpha}\cup\hat{\beta}=\hat{}\,(\alpha\,{}^*\!\!\cup\beta)$. 4) $\hat{\alpha}\cap\hat{\beta}=\hat{}\,(\alpha\,{}^*\!\!\cap\beta)$. 5) $\hat{\alpha}-\hat{\beta}=\hat{}\,(\alpha\,{}^*\!\!-\beta)$. 6) $\hat{\alpha}\times\hat{\beta}=\hat{}\,(\alpha\,{}^*\!\!\times\beta)$. 7) φ が＊関係（$\varphi\,{}^*\!\!\subset\alpha\,{}^*\!\!\times\beta$）なら $\hat{\varphi}$ は関係（$\hat{\varphi}\subset$ $\hat{\alpha}\times\hat{\beta}$）である．とくに φ が＊写像なら $\hat{\varphi}$ は写像である．

証明 6) だけ証明する．$\zeta\in{}^*U$ に対し，$\zeta\in\hat{\alpha}\times\hat{\beta}\Longleftrightarrow\zeta={}^*(\xi,\eta)$，$\xi\in\hat{\alpha}$, $\eta\in\hat{\beta}\Longleftrightarrow\zeta={}^*(\xi,\eta)$, $\xi\,{}^*\!\!\in\alpha$, $\eta\,{}^*\!\!\in\beta\Longleftrightarrow\zeta\,{}^*\!\!\in\alpha\,{}^*\!\!\times\beta\Longleftrightarrow\zeta\in\hat{}\,(\alpha\,{}^*\!\!\times\beta)$. ここで，$^*U$ での順序対を $^*(\xi,\eta)$ としたことが本質的に効いている．他の証明はやさしい．▮

内集合と外集合

2.5.3 定義 $^*U$ の部分集合 A がある＊集合の領域であるとき，すなわち $A=\hat{\alpha}$ なる＊集合 α が存在するとき，A は**内的**（internal）である，または**内集合**であると言う．内的でない $^*U$ の部分集合は**外的**（external）である．または**外集合**であると言う．関係や写像は，集合として内的のとき内的であると言う．

2.5.4 例 1) $^*\mathscr{U}$ を超冪モデルとし，$\{\alpha(i)\,;\,i\in I\}$ を U に属する空でない集合の族とする．第一章の意味での超積 $A=\prod_{\mathscr{F}}\alpha(i)$ は，$^*U$ の元 $\alpha=[\alpha(i)]$ の領域 $\hat{\alpha}$ と同一視される．実際，この二つはほとんど同じものである．注意 **2.4.5** の記号を使うと，A の元 $\xi=\langle\xi(i)\rangle$ は，直積 $\prod_{i\in I}\alpha(i)$ の元 $(\xi(i))$ の属する類（mod $\mathscr{F}$）であり，対応する $^*U$ の元 $\bar{\xi}=[\xi(i)]$

は，${}^I U$ すなわち直積 $\prod_{i\in I} U$ の元 $(\xi(i))$ の属する類 (mod $\mathscr{F}$) である．しかも $\bar{\xi}{}^*\in\alpha$，すなわち $\bar{\xi}\in\hat{\alpha}$ となっている．

2)　$^*\mathscr{U}$ を超準モデルとし，$^*\boldsymbol{N}$ は超準元をもつとする．このとき，有限自然数の全体 $\mathring{N}=\{^*n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ および無限大超自然数の全体 $\hat{N}-\mathring{N}$ はともに外的である．ただし，$\hat{N}$は ${}^\wedge(^*\boldsymbol{N})$ の略記である．実際，かりに $\hat{N}-\mathring{N}=\hat{\alpha}$ なる＊集合 α が存在したとすると，仮定によって $\alpha\neq{}^*\varnothing$．＊帰納法 **2.3.11** により，$\alpha$ は最小元 ξ をもつ．$\xi\notin\mathring{N}$ だから ξ は超準元，すなわち無限大超自然数である．$\xi-1$ も無限大超自然数だから，ξ は最小元でないことになる．

2.5.5　定理（内集合の判定 1）　$^*U$ の部分集合 A が内的であるためには，つぎの条件がみたされることが必要十分である：＊集合 γ，$^*U$ の有限個の元 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ および $\mathscr{L}$ の $n+1$ 変項論理式 $\phi(\mathsf{x},\mathsf{y}_1,\cdots,\mathsf{y}_n)$ が存在し，$^*U$ の任意の元 ξ に対して

$$\xi\in A \Longleftrightarrow \xi{}^*\in\gamma \text{ かつ } \phi(\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n) \text{ が＊真}$$

となる．

証明　1°　$A=\hat{\alpha}$ なら，γ として α，$n=1$，η として α を取り，$\phi(\mathsf{x},\mathsf{y})$ を《$\mathsf{x}\in\mathsf{y}$》とすればよい．

2°　条件がみたされているとき，U に属する任意の集合 C および U の任意の元 $y_1,\cdots,y_n$ に対し，$\{x\in C\,;\,\phi(x,y_1,\cdots,y_n)\}$ は C の部分集合であり，したがって U に属する．よって $\mathscr{L}$ の文

$$\forall\mathsf{z}\forall\mathsf{y}_1\cdots\forall\mathsf{y}_n\exists!\mathsf{w}\forall\mathsf{x}[\mathsf{x}\in\mathsf{w}\longleftrightarrow[\mathsf{x}\in\mathsf{z}\wedge\phi(\mathsf{x},\mathsf{y}_1,\cdots,\mathsf{y}_n)]]$$

は真，したがってモデル同値の原理によって＊真である．z を α，y_i を η_i と思えば，＊集合 α が存在し，$^*U$ の任意の元 ξ に対して

$$\xi{}^*\in\alpha \Longleftrightarrow \xi{}^*\in\gamma \text{ かつ } \phi(\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n) \text{ が＊真}$$

となる．よって $A=\hat{\alpha}$．∎

2.5.6　定理（内集合の判定 2）　$^*U$ の部分集合 A が内的であるためには，つぎの条件がみたされることが必要十分である：＊集合 γ および $^*\mathscr{L}$ の一変項論理式 $\phi(\mathsf{x})$ が存在し，$^*U$ の任意の元 ξ に対して

$$\xi\in A \Longleftrightarrow \xi{}^*\in\gamma \text{ かつ } \phi(\xi) \text{ が＊真}$$

となる．

証明　1°　$A=\hat{\alpha}$（αは＊集合）なら，γをαとし，$\phi(\mathsf{x})$を《$\mathsf{x}\in\alpha$》とすればよい．

2°　ϕに現われる定項でUの元に対応しないもの，すなわち$^*\mathscr{C}-\mathscr{C}$の元の全部を$\mathsf{a}_1,\cdots,\mathsf{a}_n$とし，これらを$\phi$に現われない変項$\mathsf{y}_1,\cdots,\mathsf{y}_n$で置きかえると，$\mathscr{L}$の論理式$\phi(\mathsf{x},\mathsf{y}_1,\cdots,\mathsf{y}_n)$が得られる．$^*\iota(\mathsf{a}_i)=\eta_i$とすると，条件により，

$$\xi\in A \Longleftrightarrow \xi^*\in\gamma \text{ かつ } \phi(\xi,\eta_1,\cdots,\eta_n) \text{ が＊真}$$

となる．前定理によってAは内的である．∎

2.5.7　例　1)　$(a,\leqslant)$がUに属する順序集合のとき，$\hat{a}={}^\wedge({}^*a)$の区間はすべて内的である．たとえば，$\hat{a}$の二元λ,μを端点とする閉区間$[\lambda,\mu]=\{\xi\in\hat{a}\,;\,\lambda\leqslant\xi\leqslant\mu\}$の場合には，定理**2.5.6**の第二判定法で$\gamma$を$^*a$，$\phi(\mathsf{x})$を《$\mathsf{x}\in a\wedge\lambda\leqslant\mathsf{x}\wedge\mathsf{x}\leqslant\mu$》とすればよい．開区間，半開区間や切片$\{\xi\in\hat{a}\,;\,\xi\leqslant\lambda\}$等の場合もまったく同様である．

2)　二項関係$f\subset a\times b$に対し，$\mathscr{D}f=\{x\in a\,;$ ある$y\in b$に対して$(x,y)\in f\}$（fが函数なら定義域），$\mathscr{R}f=\{y\in b\,;$ ある$x\in a$に対して$(x,y)\in f\}$（fが函数なら値域）と書く．＊二項関係$\varphi^*\subset\alpha^*\times\beta$に対し，$\mathscr{D}\hat{\varphi}={}^\wedge({}^*\mathscr{D}\varphi)$，$\mathscr{R}\hat{\varphi}={}^\wedge({}^*\mathscr{R}\varphi)$．したがって，内的二項関係の定義域，値域はまた内的である．実際，$\phi(\mathsf{x})$を《$\mathsf{x}\in\alpha\wedge\exists\mathsf{y}[\mathsf{y}\in\beta\wedge\mathsf{x}\ \mathrm{pr}\ \mathsf{y}\in\varphi]$》なる一変項論理式とすると，$^*\mathscr{D}\varphi={}^*\{\xi^*\in\alpha\,;\,\phi(\xi)\}$と書けるからよい．$\mathscr{R}$に関しても同様．

3)　$^*U$の有限部分集合はすべて内的である．実際，$A=\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}\subset{}^*U$とする．$\mathscr{L}$の文

$$\forall\mathsf{x}_1\cdots\forall\mathsf{x}_n\exists!\mathsf{y}\forall\mathsf{z}[\mathsf{z}\in\mathsf{y}\longleftrightarrow\mathsf{z}=\mathsf{x}_1\vee\cdots\vee\mathsf{z}=\mathsf{x}_n]$$

は真，したがって＊真である．よって＊集合$\alpha={}^*\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$が存在する．

4)　二つの内的二項関係の合成関係は内的である．ただし，$f\subset a\times b$，$g\subset b\times c$の合成関係$g\circ f$とは，$a\times c$の元(x,z)で，bのある元yに対して，$(x,y)\in f$，$(y,z)\in g$となるものの全体である．実際，$\varphi^*\subset\alpha^*\times\beta$および$\psi^*\subset\beta^*\times\gamma$に対し，簡単に分るように，$\hat{\psi}\circ\hat{\varphi}={}^\wedge(\psi^*\circ\varphi)$となる．

5)　$\lambda^*\in{}^*\boldsymbol{N}$，$\alpha,\beta^*\in{}^*\boldsymbol{R}$を固定する．$\hat{\boldsymbol{R}}$の超点列，すなわち$\hat{\boldsymbol{N}}$から$\hat{\boldsymbol{R}}$への写像$\varphi$を，$\nu\leqslant\lambda$なら$\varphi(\nu)=\alpha$，$\nu>\lambda$なら$\varphi(\nu)=\beta$として定めると，$\varphi$

は内的である．実際，第二判定法で γ を $^*N^*\times{}^*R$ とし，$\phi(\mathrm{x})$ を

$$\exists\mathrm{u}\exists\mathrm{v}[\mathrm{u}\in N\wedge\mathrm{v}\in R\wedge\mathrm{x}=\mathrm{u\ pr\ v}\wedge[\mathrm{u}\leqslant\lambda\rightarrow\mathrm{v}=\alpha]\wedge[\mathrm{u}>\lambda\rightarrow\mathrm{v}=\beta]]$$

とすればよい．

超冪モデルにおける写像の延長定理

ここで，とくに超冪モデルの場合に成りたつ重要な定理を証明する．これは，本書の主題である広大モデル（次章を見よ）でも一般には成りたたない．しかし，飽和モデルではもっと強い形の定理が成立つ（定理 3.1.16）．

2.5.8　定理　　$^*\mathscr{U}$ を超冪モデル、a を U に属する集合，β を＊集合とする．a から $\hat{\beta}$ への任意の写像は　$\hat{a}$ から $\hat{\beta}$ への内写像に延長される．すなわち，a から $\hat{\beta}$ への写像 φ に対し，$^*a$ から β への＊写像 ϕ が存在し，任意の $x\in a$ に対して $\phi(^*x)=\varphi(x)$ となる．

証明　　$\beta=[\beta_i]$ とし，必要なら β_i を修正して，各 β_i を U に属する空でない集合とする．さらに β のあらゆる＊元 η に対し，$\eta=[\eta_i]$, $\eta_i\in\beta_i$ なる代表を選んでおく（選択公理）．I の各元 i に対し，a から β_i への写像 ϕ_i を，$\phi_i(x)=\varphi(x)_i$ で定義する．$\phi=[\phi_i]$ は $^*a$ から β への＊写像であり，$^*a$ の＊元 $\xi=[\xi_i]$ に対し，$\phi(\xi)_i=\phi_i(\xi_i)=\varphi(\xi_i)_i$．とくに $\xi={}^*x$ $(x\in a)$ なら，$\phi(^*x)_i=\phi_i(x)=\varphi(x)_i$．したがって $\phi(^*x)=\varphi(x)$ となる．∎

2.5.9　系　　上と同じ条件のもとで，$\hat{\beta}$ の点列すなわち N から $\hat{\beta}$ への写像は $\hat{\beta}$ の内的点列，すなわち $\hat{N}$ から $\hat{\beta}$ への内写像に延長される．

＊ 有 限 性

2.5.10　定義　　有限集合という概念を＊解釈したものを**＊有限集合**と言う．我々は選択公理を仮定しているから，《z が有限集合である》ということは，つぎの $\phi_1(\mathrm{z}), \phi_2(\mathrm{z})$ のどちらでも表わされる（$N\in U$ とする）：

$\phi_1(\mathrm{z}):\mathrm{z}\neq\emptyset\rightarrow\exists\mathrm{x}\exists\mathrm{y}[\mathrm{x}\in N\wedge\mathrm{y}(\mathrm{bijection}:[0,\mathrm{x}]\rightarrow\mathrm{z})]$,

$\phi_2(\mathrm{z}):\mathrm{z}(\mathrm{set})\wedge\neg[\exists\mathrm{x}\exists\mathrm{y}[\mathrm{x}\subset\mathrm{z}\wedge\mathrm{x}\neq\mathrm{z}\wedge\mathrm{y}(\mathrm{bijection}:\mathrm{z}\rightarrow\mathrm{x})]]$.

$\phi_1(\mathrm{z})$ は，N の切片 $[0,n]$ から z への双射が存在することを表わす．$\mathrm{x}+1$ が z の元の数である．だから，α が＊有限集合であるとは，$^*N$ の切片 $^*[0,\nu]$

から α への＊双射が存在することである．α の＊濃度 $\nu+1$ を $^*|\alpha|$ と書く．

$\phi_2(\mathrm{z})$ はカントル・デデキント式有限集合の定義である．すなわち，z と z の真部分集合との間に双射が存在しないことを表わす．

＊有限という概念は，超準解析でもっとも有効な概念の一つである．

2.5.11 命題　つぎのことはどちらも簡単に証明される．

1)　＊有限集合の＊部分集合は＊有限である．

2)　α, β が＊有限なら $\alpha \,^*\!\times \beta$ も＊有限である．また，α から β への＊写像の全体 $^*\mathrm{Map}(\alpha, \beta)$ も＊有限である．

＊ 有 限 和

第一章（定義 **1.3.14** を見よ）で不十分な形で扱った＊有限和を一般的に定義する．

2.5.12 定義　X を U に属する集合とする．$\boldsymbol{N}$ の有限区間 $[k, l]$ から X への写像を有限列と言うのだった．これを＊解釈したもの，すなわち $^*\boldsymbol{N}$ の＊有限区間 $[\kappa, \lambda]$ から $^*X$ への＊写像を**＊有限列**と言う．

2.5.13 定義　$(X, +)$ を U に属する半群とする．X の有限列の全体 $\mathscr{Q}(X)$ から X への写像 Σ をつぎのように定める．$a : [k, l] \to X$ に対し，$\Sigma(a) = \sum_{n=k}^{l} a(n)$．これにより，$^*X$ の＊有限列全体 $^*\mathscr{Q}(^*X)$ から $^*X$ への＊写像 $^*\Sigma$ が定まる．$\alpha : {}^*[\kappa, \lambda] \overset{*}{\longrightarrow} {}^*X$ のとき，$^*\Sigma(\alpha)$ を $^*\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} \alpha(\nu)$ または $\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} \alpha(\nu)$ と書く．これを**＊有限和**と言う．

2.5.14 定理　＊有限和は有限和と同じような性質をもつ．すなわち，

1)　$\kappa \leqslant \mu < \lambda$ なら，$\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} \alpha(\nu) = \sum_{\nu=\kappa}^{\mu} \alpha(\nu) + \sum_{\nu=\mu+1}^{\lambda} \alpha(\nu)$.

2)　X が可換半群なら，$\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} (\alpha+\beta)(\nu) = \sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} \alpha(\nu) + \sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} \beta(\nu)$.

3)　X が，分配的作用域 E をもつとき，$\varepsilon \,^*\!\in {}^*E$ に対し，$\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} (\varepsilon\cdot\alpha)(\nu) = \varepsilon\cdot \sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} \alpha(\nu)$.

4)　$E = \boldsymbol{N}$ として，$\sum_{\nu=\kappa}^{\lambda} \alpha = (\lambda-\kappa+1)\alpha$.

証明　1)　$\mathscr{U}$ で真な文（略式に書く）

$$\forall k\forall m\forall l\forall f\forall g\forall h[k, m, l\in \boldsymbol{N}\wedge k\leqslant m<l\wedge f(\mathrm{map}:[k, l]\to X)$$
$$\wedge g=f|_{[k,m]}\wedge h=f|_{[m+1,l]}\to\Sigma(f)=\Sigma(g)+\Sigma(h)]$$

をモデル同値の原理によって＊解釈すればよい．ただし，タテ棒｜は写像の定義域を制限する記号である．

2) 以下も同じように証明される．▮

2.5.15　例　　＊有限性を使って，簡単な場合に確率概念を拡張することを試みる．$\boldsymbol{N}\in U$ とし，$^*\boldsymbol{N}$ は超準元 λ をもつとする．$^*\boldsymbol{Z}$ の区間 $F={}^*[-\lambda, \lambda]$ は＊有限集合で，その＊濃度は $2\lambda+1$ である．$\boldsymbol{Z}$ の部分集合 A に対し，$\mu(A)=\dfrac{^*|^*A\ ^*\cap F|}{2\lambda+1}$ とおく．

1) $0\leqslant\mu(A)\leqslant 1.$ $\mu(A)=0 \Leftrightarrow A=\varnothing.$ $\mu(A)=1 \Leftrightarrow A=\boldsymbol{Z}.$

2) $A\cap B=\varnothing$ なら $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$（有限加法性）．

3) A が有限集合なら $\mu(A)\fallingdotseq 0.$

4) $k\in\boldsymbol{Z}$ に対し，$\mu(A+k)\fallingdotseq\mu(A)$（殆不変性）．ただし，$A+k=\{n+k\,;\,n\in A\}.$

5) もし $b=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|A\cap[-n, n]|}{2n+1}$ が存在すれば，$\mu(A)\fallingdotseq b.$

6) μ の定義域を拡大し，$^*\boldsymbol{Z}$ の＊部分集合 α に対して $\mu(\alpha)=\dfrac{^*|\alpha\ ^*\cap F|}{2\lambda+1}$ と置いておく．$\{A_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ を $\boldsymbol{Z}$ の部分集合の無共分族（$n\neq m \Rightarrow A_n\cap A_m=\varnothing$）とする．このとき，ある $\kappa\in{}^*\boldsymbol{N}$ を取ると，$\nu>\kappa$ なら $\mu(^*A_\nu)=0$ であり，$\mu\left(\bigcup\limits_{n\in N}A_n\right)=\sum\limits_{\nu=0}^{\kappa}\mu(^*A_\nu)$ が成立つ（＊有限加法性）．

証明　　1), 2), 3) は明らかである．

4) $\mu(A+k)=\dfrac{^*|^*(A+k)\ ^*\cap F|}{2\lambda+1}=\dfrac{^*|^*A\ ^*\cap(F-k)|}{2\lambda+1}.$ よって $|\mu(A+k)-\mu(A)|\leqslant\dfrac{2|k|}{2\lambda+1}\fallingdotseq 0.$

5) $a(n)=\dfrac{|A\cap[-n, n]|}{2n+1}$ とする．任意の正実数 e に対し，ある $n_0\in\boldsymbol{N}$ を取ると，$n_0\leqslant n\in\boldsymbol{N}$ なら $|a(n)-b|\leqslant e.$ したがって，任意の無限大自然数 ν に対して $|^*a(\nu)-b|\leqslant e.$　e は任意だから $^*a(\nu)\fallingdotseq b.$　ところが $\mu(A)={}^*a(\lambda)$ である．

6) $^*A_\nu\ ^*\cap F$ $(\nu\in{}^*\boldsymbol{N})$ はすべて F の＊部分集合であり，$\nu\neq\mu$ なら $^*A_\nu\ ^*\cap{}^*A_\mu={}^*\varnothing$ だから，＊有限個以外は $^*\varnothing$ でなければならない．よって，ある $\kappa\in{}^*\boldsymbol{N}$ を取ると，$\nu>\kappa$ に対して $\mu(^*A_\nu)=0$ となる．つぎに $A=\bigcup\limits_{n\in N}A_n$

とすると $^*A={}^*\bigcup_{\nu\in {}^*N}{}^*A_\nu$ だから, $^*A\,{}^*\cap F={}^*\bigcup_{\nu\in {}^*N}({}^*A_\nu{}^*\cap F)={}^*\bigcup_{\nu=0}^{\kappa}({}^*A_\nu{}^*\cap F)$.
よって $\mu(A)=\sum_{\nu=0}^{\kappa}\mu({}^*A_\nu)$. ∎

§6 応用：定積分

第一章では軽く触れただけだった定積分を我々の立場から扱う. $\mathscr{U}$ は標準モデルで, $\boldsymbol{R}\in U$ なるものとし, $^*\mathscr{U}$ は超準モデルで, $^*\boldsymbol{R}$ には超準元（とくに無限小や無限大）があるとする.

2.6.1 定義 1) $\boldsymbol{R}$ の閉区間 $A=[a,b]$ の**分割**とは, 有限列 $D=(a_0, a_1, \cdots, a_l)$ で, $a=a_0<a_1<\cdots<a_l=b$ なるものである. この全体を $\boldsymbol{P}$ と書く. 実数の有限列 $X=(x_1,\cdots,x_l)$ が, 条件 $a_{n-1}\leqslant x_n\leqslant a_n$ $(1\leqslant n\leqslant l)$ をみたすとき, X は D に**適合する**と言う. 対 (D,X) の全体を $\boldsymbol{T}$ と書く. また, $\max_{1\leqslant n\leqslant l}(a_n-a_{n-1})$ を $|D|$ と書く. A から $\boldsymbol{R}$ への写像 f に対し, $\boldsymbol{T}$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 S を

$$S(D,X)=\sum_{n=1}^{l}f(x_n)(a_n-a_{n-1})$$

で定める.

2) f がリーマンの意味で**可積**であるとは, 実数 c が存在し, どんな正実数 e に対しても, 適当な正実数 d を取ると, $|D|\leqslant d$ なる任意の $(D,X)\in\boldsymbol{T}$ に対して $|c-S(D,X)|\leqslant e$ となることであった. また, このとき $c=\int_a^b f(x)dx$ であった.

3) $^*\boldsymbol{P}$ の元を A の$*$**分割**と言う. すなわち $^*\boldsymbol{P}$ の元 $\varDelta=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_\lambda)$ $(\lambda\in{}^*\boldsymbol{N})$ は, $a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_\lambda=b$ なる$*$有限列である. あらゆる ν $(\nu\in {}^*\boldsymbol{N},\ 1\leqslant\nu\leqslant\lambda)$ に対して $\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1}\fallingdotseq 0$ のとき, すなわち $^*|\varDelta|=\max_{1\leqslant\nu\leqslant\lambda}(\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1})\fallingdotseq 0$ のとき, $\varDelta$ を**微細分割** (fine partition) と言う. 仮定によって無限大超自然数 λ が存在するから, $\alpha_\nu=a+\frac{\nu}{\lambda}(b-a)$ とすれば $(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_\lambda)$ は微細分割である.

4) $^*\boldsymbol{T}$ の$*$元 $(\varDelta,\varXi)$ を取ると, $\varXi=(\xi_1,\cdots,\xi_\lambda)$, $\alpha_{\nu-1}\leqslant\xi_\nu\leqslant\alpha_\nu$ である. f に対して $^*\boldsymbol{T}$ から $^*\boldsymbol{R}$ への$*$写像 $^*S$ が, $^*S(\varDelta,\varXi)={}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}{}^*f(\xi_\nu)(\alpha_\nu-\alpha_{\nu-1})$

によって定まる．

2.6.2　定理　　函数 f が可積であるためには，

a）$\varDelta$ が微細分割なら，任意の $(\varDelta, \varXi)^* \in {}^*\boldsymbol{T}$ に対して ${}^*S(\varDelta, \varXi)$ は有限超実数である．

b）任意の微細分割 $\varDelta, \varDelta'$ および $(\varDelta, \varXi)$，$(\varDelta', \varXi') \in {}^*\boldsymbol{T}$ に対して ${}^*S(\varDelta, \varXi) \fallingdotseq {}^*S(\varDelta', \varXi')$

の二条件がみたされることが必要十分である．このとき，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は ${}^*S(\varDelta, \varXi)$ の共通の標準部分に等しい．

証明　　1°　f が可積とする．その条件（前定義の2））において c, e, d を固定すると，$\mathscr{L}$ の文《$\forall y[y=(D, X) \in \boldsymbol{T} \wedge |D| \leqslant d \rightarrow |c-S(D, X)| \leqslant e]$》は真，したがって＊真である．すなわち，$(\varDelta, \varXi) \in {}^*\boldsymbol{T}$ かつ ${}^*|\varDelta| \leqslant d$ であれば $|c-{}^*S(\varDelta, \varXi)| \leqslant e$ が成立つ．$\varDelta$ が微細分割なら $|\varDelta| \leqslant d$ だから，任意の e に対して $|c-{}^*S(\varDelta, \varXi)| \leqslant e$，すなわち ${}^*S(\varDelta, \varXi) \fallingdotseq c$ となる．

2°　f が可積でないとする．どんな実数 c に対してもある正実数 e を取ると，どんな正実数 d に対しても $(D, X) \in \boldsymbol{T}$ で，$|D| \leqslant d$，$|c-S(D, X)| > e$ となるものが存在する．ここで c, e を固定すると，$\mathscr{L}$ の文

$$\forall d > 0 \exists y = (D, X) \in \boldsymbol{T}[\,|D| \leqslant d \wedge |c-S(D, X)| > e]$$

は真，したがって＊真である．すなわち，どんな正の超実数 δ に対しても，${}^*\boldsymbol{T}$ の＊元 $(\varDelta, \varXi)$ で，$|\varDelta| \leqslant \delta$，$|c-{}^*S(\varDelta, \varXi)| > e$ なるものが存在する．いま定理の条件がみたされているとして，δ を無限小に取れば $\varDelta$ は微細分割である．$c = \mathrm{st}[{}^*S(\varDelta, \varXi)]$ とすると条件に反する．∎

超準的方法で連続函数の可積性を証明してみよう．

2.6.3　定理　　閉区間上の連続函数は可積である．

証明　　1°　f は有界だから，ある実数 M を取ると $|{}^*f(\xi)| \leqslant M$ となる．$|{}^*S(\varDelta, \varXi)| \leqslant M(b-a)$．よって a）は成立つ．

2°　$\varDelta, \varDelta'$ を微細分割とする．$\varDelta, \varDelta'$ を併わせた＊分割も微細だから，はじめから $\varDelta'$ が $\varDelta$ の細分になっているとしてよい．

3°　$\varDelta = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_\lambda)$ に対して $\varXi_\varDelta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\lambda)$ とすれば $(\varDelta, \varXi_\varDelta) \in \boldsymbol{T}$．

$$|{}^*S(\varDelta, \varXi) - {}^*S(\varDelta, \varXi_\varDelta)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\lambda} |{}^*f(\xi_\nu) - {}^*f(\alpha_\nu)|(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}).$$

$\varepsilon=\operatorname*{Max}_{1<\nu<\lambda}|{}^*f(\xi_\nu)-{}^*f(\alpha_\nu)|\fallingdotseq 0$ だから，右辺は $\varepsilon(b-a)$ で押さえられる．したがって，$(\varDelta,\varXi_\varDelta)$，$(\varDelta',\varXi_{\varDelta'})$について b) を言えばよい．

4° $\varDelta'=(\beta_{1,0},\beta_{1,1},\cdots,\beta_{1,\kappa(1)},\beta_{2,0},\cdots,\beta_{\lambda,\kappa(\lambda)})$ と書き，各 ν $(1\leqslant\nu\leqslant\lambda)$ に対して $\alpha_{\nu-1}=\beta_{\nu,0}<\beta_{\nu,1}<\cdots<\beta_{\nu,\kappa(\nu)}=\alpha_\nu$ とする．

$$ {}^*S(\varDelta',\varXi_{\varDelta'})=\sum_{\nu=1}^{\lambda}\left[\sum_{\mu=1}^{\kappa(\nu)}{}^*f(\beta_{\nu,\mu})(\beta_{\nu,\mu}-\beta_{\nu,\mu-1})\right]. $$

$$ |{}^*S(\varDelta,\varXi_\varDelta)-{}^*S(\varDelta',\varXi_{\varDelta'})|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\lambda}\sum_{\mu=1}^{\kappa(\nu)}|{}^*f(\alpha_\nu)-{}^*f(\beta_{\nu,\mu})|(\beta_{\nu,\mu}-\beta_{\nu,\mu-1}) $$

$$ \leqslant\varepsilon(b-a). \blacksquare $$

練 習 問 題

とくに断わらないときは，$^*\mathscr{U}$ は超準モデル，$N\in U$ で，$^*N$ は超準$*$元をもつとする．

1. $*$集合 α,β に対し，$\alpha\,{}^*\!\cup\beta$，$\alpha\,{}^*\!\cap\beta$，$\alpha\,{}^*\!-\beta$ を定義し，その一意存在を証明せよ．

2. $^*\mathscr{U}$ をモデルとし，$N\in U$ とする．$^*N$ が超準$*$元をもてば，任意の無限集合 $A\in U$ に対し，$^*A$ は超準$*$元をもつ．

3. 宇宙 U での選択公理を $\mathscr{L}$ の論理式（文）で書け．これを$*$解釈することにより，$^*U$ で$*$選択公理が成りたつ．

4. $^*\mathscr{U}$ を超冪モデルとする．$\alpha=[\alpha(i)]$，$\beta=[\beta(i)]$ 等と書く．
   1) $\alpha\in{}^*U$ が$*$集合 $\Leftrightarrow$ $\{i\in I\,;\,\alpha(i)$ が集合$\}\in\mathscr{F}$．
   2) $\alpha\,{}^*\!\subset\beta \Leftrightarrow \{i\,;\,\alpha(i)\subset\beta(i)\}\in\mathscr{F}$．
   3) $^*\{\alpha,\beta\}=[\{\alpha(i),\beta(i)\}]$，$^*(\alpha,\beta)=[(\alpha(i),\beta(i))]$，$\alpha\,{}^*\!\overset{\cup}{\cap}\beta=[\alpha(i)\overset{\cup}{\cap}\beta(i)]$．
   4) $^*\bigcup\alpha=[\bigcup\alpha(i)]$，$^*\mathscr{P}(\alpha)=[\mathscr{P}(\alpha(i))]$，$\alpha\,{}^*\!\times\beta=[\alpha(i)\times\beta(i)]$．
   5) $\psi(\mathrm{x})$ が $^*\mathscr{L}$ の一変項論理式のとき，**2.4.2** のようにして決まる $\mathscr{L}$ の論理式を $\psi_i(\mathrm{x})$ $(i\in I)$ と書く．$\alpha={}^*\{\xi\,;\,\psi(\xi)\} \Leftrightarrow \{i\,;\,\alpha(i)=\{x\,;\,\psi_i(x)\}\}\in\mathscr{F}$．
   6) φ が α から β への$*$写像 $\Leftrightarrow$ $\{i\,;\,\varphi(i)$ が $\alpha(i)$ から $\beta(i)$ への写像$\}\in\mathscr{F}$．このとき，$\varphi(\xi)=[\varphi(i)(\xi(i))]$．

5. $^*\mathscr{U}$ を超冪モデル，α,β を$*$集合，C を $\hat{\alpha}$ の可算部分集合，f を C から β への写像とする．f は $\hat{\alpha}$ から $\hat{\beta}$ への内写像に延長される．すなわち，αから β への$*$写像 φ が存在し，$\xi\in C$ に対して $\varphi(\xi)=f(\xi)$ となる．

6. $^*\mathscr{U}$ を超準モデル，α を $^*\boldsymbol{N}$ から $^*\boldsymbol{R}$ への$*$写像とする．

1) 超実数 ρ が存在し，任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $\alpha(n)\leqslant\rho$ が成りたつならば，無限大超自然数 κ が存在し，$\nu\leqslant\kappa$ に対して $\alpha(\nu)\leqslant\rho$ となる．

2) 任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $\alpha(n)\fallingdotseq 0$ なら，無限大超自然数 κ が存在し，$\nu\leqslant\kappa$ に対して $\alpha(\nu)\fallingdotseq 0$ となる．

7. $^*\mathscr{U}$ を超冪モデル，a を $\boldsymbol{N}$ から $\mu(0)$ への写像とする．このとき，正の無限小超実数 ε が存在し，$|a(n)|\leqslant\varepsilon$ $(n\in\boldsymbol{N})$ となる．

8. 集合の対称差 $(A-B)\cup(B-A)$ を $A\triangle B$ と書く．$*$有限集合 A,B に対し，つぎの三条件はたがいに同値である（$*$記号は省略する）：a) $\dfrac{|A\cap B|}{|A|}\fallingdotseq\dfrac{|A\cap B|}{|B|}\fallingdotseq 1$，b) $\dfrac{|A\triangle B|}{|A|}\fallingdotseq\dfrac{|A\triangle B|}{|B|}\fallingdotseq 0$，c) $\dfrac{|A\cup B|}{|A|}\fallingdotseq\dfrac{|A\cup B|}{|B|}\fallingdotseq 1$．この条件が成りたつとき $A\sim B$ と書くと，$\sim$ は同値関係である．

9. 1) 有限生成可換群は$*$有限可換群に埋めこまれる．

2) $\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{Z})$ は$*$有限群に埋めこまれる．

10. X を U に属する集合とし，$\boldsymbol{F}$ を X 上のフィルターの全体とする．$\hat{\boldsymbol{F}}$ は $^*X$ 上の$*$フィルターの全体である．

1) $\mathscr{B}=\{\hat{\Gamma}\,;\,\Gamma^*\in{}^*\boldsymbol{F}\}$ は $\hat{X}$ 上のフィルター基底であるが，X が無限集合ならこれはフィルターではない．

2) $\Phi\in\hat{\boldsymbol{F}}$ なら $\Phi_0=\{A\subset X\,;\,{}^*A^*\in\Phi\}$ は X 上のフィルターである．

3) Φ が$*$超フィルターなら Φ_0 は超フィルターである（命題**4.5.3**および補題**4.5.4**）．

第三章　モデルの広大化，とくに広大モデルと飽和モデル

超準解析を展開するためには，一般の超準モデルでは十分でない．この目的のために，簡単でしかも強力なのが広大モデルである．本章では，まずモデルの広大化という概念を導入し，標準モデルの広大化として広大モデルを，自分自身の広大化として飽和モデルを定義する．広大モデルの存在は，モデル理論のコンパクト性定理によって示すのが普通だが（付録IIを見よ），この本ではそれを避け，特別な超冪モデルとして広大モデルを構成する．飽和モデルは広大モデルよりもっと強力であり，とくにモデル理論では重要な意味をもつ．しかし，本書ではほとんどそれなしにすませるし，また超冪モデルとしてそれを構成するのが非常に難かしいので，ここでは概説だけにとどめ，存在証明は付録にまわした．

§1　モデルの広大化．広大モデル・飽和モデルの定義と性質

広大化・広大モデル・飽和モデルの定義

3.1.1　定義　$^\circ\mathscr{U}=(^\circ U, {}^\circ\iota, {}^\circ\in, {}^\circ\mathrm{pr}, {}^\circ\mathrm{ap})$ を任意の（標準または超準）モデル，拡大された言語を $^\circ\mathscr{L}$ とし，$^\circ\mathscr{L}$ の一変項論理式の全体を $^\circ\mathscr{M}$ と書く．$\mathscr{A}$ を $^\circ\mathscr{M}$ の部分集合とする．

1)　$^\circ U$ の元 β が存在し，あらゆる $\phi\in\mathscr{A}$ に対して $\phi(\beta)$ が $^\circ\mathscr{U}$ で真となるとき，$\mathscr{A}$ は $^\circ U$ の中で**同時に成りたつ**（satisfiable）または $^\circ U$ の中で**共起する**と言う．

2)　$\mathscr{A}$ の任意の有限部分集合が $^\circ U$ の中で共起するとき，$\mathscr{A}$ は $^\circ U$ の中で**有限共起的**（finitely satisfiable）であると言う．

3.1.2　例　つぎの $\mathscr{A}$ はどれも標準モデル $\mathscr{U}$ の中で有限共起的であるが共起的ではない．

1)　自然数 n に対する論理式《$n<\mathrm{y}$》の全体.

2)　$\boldsymbol{R}^{++}=\{x\in\boldsymbol{R}\,;\,x>0\}$ とする. a が $\boldsymbol{R}^{++}$ を動くときの論理式《$\mathrm{y}\in\boldsymbol{R}^{++}\wedge\mathrm{y}<a$》の全体.

3)　A を U に属する無限集合とする. a が A を走るときの論理式《$\mathrm{y}\in A\wedge\mathrm{y}\neq a$》の全体.

4)　X を U に属する離散でない位相空間, a を X の点, $\mathscr{V}(a)$ を a の近傍の全体とする. A が $\mathscr{V}(a)$ を走るときの論理式《$\mathrm{y}\in\mathscr{V}(a)\wedge\mathrm{y}\subset A$》の全体.

5)　a が U を走るときの論理式《y(finite set)$\wedge a\in\mathrm{y}$》の全体.

3.1.3　定義　　$^\circ\mathscr{U}=(^\circ U, {}^\circ\iota, {}^\circ\in, {}^\circ\mathrm{pr}, {}^\circ\mathrm{ap})$ および $^*\mathscr{U}=(^*U, {}^*\iota, {}^*\in, {}^*\mathrm{pr}, {}^*\mathrm{ap})$ を任意の（標準または超準）モデル，それぞれの拡大された言語を $^\circ\mathscr{L}$, $^*\mathscr{L}$ とし, $^\circ\mathscr{L}$ は $^*\mathscr{L}$ に含まれると仮定する. $^\circ\mathscr{L}$ の論理式は $^*\mathscr{U}$ で解釈することができる. また, $^\circ U$ から $^*U$ への写像 $a\mapsto {}^*\iota({}^\circ\iota^{-1}(a))$ は $^\circ\mathscr{U}$ から $^*\mathscr{U}$ への単型射である. この像を $^*a$ と書く.

$^\circ\mathscr{L}$ の一変項論理式の全体を $^\circ\mathscr{M}$ と書く.

κ を無限基数とする. 濃度が κ を超えない $^\circ\mathscr{M}$ の部分集合 $\mathscr{A}$ が, $^\circ U$ の中で有限共起的なら必ず $^*U$ の中で共起するとき, モデル $^*\mathscr{U}$ を, モデル $^\circ\mathscr{U}$ の κ **級広大化**（κ-enlargement）と言う. 濃度の制限がないとき, 単に**広大化**と言う.

3.1.4　定義　　1)　モデル $^*\mathscr{U}$ が標準モデル $\mathscr{U}$ の κ 級広大化であるとき, $^*\mathscr{U}$ を κ **級広大モデル**（κ-enlargement）と言う. 濃度の制限がないとき, $^*\mathscr{U}$ を単に**広大モデル**と言う.

2)　モデル $^*\mathscr{U}$ が自分自身の κ 級広大化であるとき, $^*\mathscr{U}$ を κ **級飽和モデル**（κ-saturated model）と言う.

3.1.5　注意　　1)　κ 級飽和モデルは κ 級広大モデルである.

2)　$\kappa\leqslant\lambda$ で, $^*\mathscr{U}$ が $^\circ\mathscr{U}$ の λ 級広大化なら κ 級広大化でもある.

3)　基数制限のない飽和モデルは存在しない. 実際, $^*\mathscr{U}$ をモデルとし, $^*U$ の元 α に対して決まる $^*\mathscr{L}$ の一変項論理式《$\mathrm{x}\neq\alpha$》を ϕ_α とする. $\mathscr{A}=\{\phi_\alpha\,;\,\alpha\in{}^*U\}$ とすれば, $\mathscr{A}$ は有限共起的だが共起的ではない. だから,

$\kappa \geqslant |{}^*U|$ なら，${}^*\mathscr{U}$ は κ 級飽和モデルではない．

4) $|U|$ 級広大モデルは広大モデルである．実際，$\mathscr{L}$ の濃度は $|U|$ を超えない（補題 3.2.1 を見よ）．

5) κ 級広大モデルは超準モデルである．実際，もし $\mathscr{U}$ 自身が κ 級広大モデルなら，例 **3.1.2** の 5) を考えると，U の中に無限個の元をもつ有限集合が存在することになる．

6) 普通，定義の中の不等式 $|\mathscr{A}| \leqslant \kappa$ は狭義の不等式 $|\mathscr{A}| < \kappa$ になっている．これは極限基数の場合を考慮するからである．だが，《$\mathscr{A}$ が可算》という条件が《可算級》すなわち《ω 級》と対応しないのはあまり愉快でないから，本書では一般性より簡便さを大事にした．

7) 広大モデルの定義には異同がある．ここで採用したのはもっとも強い定義だが，いまのところどの文献にも出ていない．それにも拘らずこれを採用したのはつぎの二つの理由による：

a) 定義から明らかなように，広大モデルと飽和モデルとが同質の（強弱の異なる）概念であることが強調される．

b) 正則超冪モデル（§2 を見よ）は我々の意味での広大モデルになる．しかもその証明は少しも難かしくならない．

8) しかし，超準解析を展開するためには，もっと弱い条件で十分である．我々はそれを命題として述べ，それが定義として採用されることもあることを注意する．一々断らないが，今後述べる超準解析の理論は，すべて弱い定義から導かれる．

9) 広大化の条件，すなわち《${}^\circ\mathscr{M}$ の部分集合 $\mathscr{A}$ ($|\mathscr{A}| \leqslant \kappa$) が ${}^\circ U$ の中で有限共起的なら ${}^*U$ の中で共起する》という条件は，第二章の《モデル同値の原理》と並んで，超準解析で決定的な役割を果す．だから，我々はこれを《**共起性の原理**》と名付けて引用することにする．

広大化・広大モデル・飽和モデルの性質

3.1.6 定義 ${}^\circ\mathscr{U}$ をモデル，$\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ を ${}^\circ\mathscr{L}$ の二変項論理式とする．${}^\circ U$ の元 a に対し，$\phi(a, \mathrm{y})$ は ${}^\circ\mathscr{L}$ の一変項論理式である．これを ϕ_a と書く．

$^\circ U$ の部分集合 A に対し，$\mathscr{A}(\phi, A)=\{\phi_a\,;\,a\in A\}$ は $^\circ\mathscr{M}$ の部分集合である．$\mathscr{A}(\phi, A)$ が $^\circ U$ の中で共起的〖有限共起的〗のとき，ϕ は A 上 $^\circ U$ の中で**共起する**〖**有限共起的**である〗と言う．

3.1.7　命題　　κ を無限基数，$^*\mathscr{U}$ を $^\circ\mathscr{U}$ の〖κ 級〗広大化，A を $^\circ U$ の部分集合〖で $|A|\leqslant\kappa$ なるもの〗，ϕ を $^\circ\mathscr{L}$ の二変項論理式とする．ϕ が A 上 $^\circ U$ の中で有限共起的なら，ϕ は A 上 $^*U$ の中で共起する．

証明は定義から明らかである．これを〖κ 級〗広大化の定義とすることもある．たとえば［1］における広大モデルの定義はこれである．

3.1.8　例　　例 **3.1.2** の五つの例はすべて二変項論理式で書ける：

1)　$\mathsf{x}\in\boldsymbol{N}\wedge\mathsf{y}\in\boldsymbol{N}\wedge\mathsf{x}<\mathsf{y}$.

2)　$\mathsf{x}\in\boldsymbol{R}^{++}\wedge\mathsf{y}\in\boldsymbol{R}^{++}\wedge\mathsf{y}<\mathsf{x}$.

3)　$\mathsf{x}\in A\wedge\mathsf{y}\in A\wedge\mathsf{x}\neq\mathsf{y}$（$A$ は U に属する無限集合）.

4)　$\mathsf{x}\in\mathscr{V}(a)\wedge\mathsf{y}\in\mathscr{V}(a)\wedge\mathsf{y}\subset\mathsf{x}$.

5)　$\mathsf{y}(\text{finite set})\wedge\mathsf{x}\in\mathsf{y}$.

これらはそれぞれ $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{R}^{++}, A, \mathscr{V}(a)$，$U$ 上 U の中で有限共起的である．

$^*\mathscr{U}$ が広大モデルなら，共起性の原理により，$^*\mathscr{U}$ はつぎの五つの性質をもつことになる：

1)　$^*\boldsymbol{N}$ の＊元 ν で，任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して $n<\nu$ となるものが存在する．すなわち無限大超自然数が存在する．

2)　$^*\boldsymbol{R}^{++}$ の＊元 ε で，任意の実数 $x>0$ に対して $\varepsilon<x$ なるものが存在する．すなわち，0 でない正の無限小超実数が存在する．

3)　$^*A$ の＊元 β で，任意の $a\in A$ に対して $^*a\neq\beta$ なるものが存在する．すなわち $^*A$ は超準＊元をもつ．

4)　$^*\mathscr{V}(a)$ の＊元 Γ で，a の任意の近傍 A に対して $\Gamma\,^*\!\subset{}^*A$ なるものが存在する．すなわち，$\hat{\Gamma}\subset\bigcap\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{V}(a)\}$ なるものが存在する．このような Γ を a の無限小近傍と言う（第四章を見よ）．

5)　＊有限集合 Γ で，$\mathscr{U}$ の任意の元 x に対して $^*x\,^*\!\in\Gamma$ となるものが存在する．

このうちのいくつかは，あとで定理ないし命題として再論する．

3.1.9 命題 $^*\mathscr{U}$を可算級広大モデルとする．Uに属する任意の無限集合Aに対し，$^*A$は必ず超準$*$元をもつ．

証明 Aの可算部分集合Bを取り，$\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})$を《$\mathrm{x}\in B\wedge\mathrm{y}\in B\wedge\mathrm{x}\neq\mathrm{y}$》とする．$\phi$は$B$上$U$の中で有限共起的である．したがって$^*U$の元$\beta$が存在し，$B$のあらゆる元$x$に対して$\phi({}^*x,\beta)$が$*$真となる．すなわち，$\beta\,{}^*{\in}\,{}^*B$で，任意の$x\in B$に対して$\beta\neq{}^*x$．一方，$x\in A-B$なら${}^*x\,{}^*{\notin}\,{}^*B$，よって$\beta\neq{}^*x$．したがって$A$の任意の元$x$に対して$\beta\neq{}^*x$．∎

3.1.10 例 $^*\mathscr{U}$を2^ω級（すなわち連続濃度級）広大モデルとし，$\boldsymbol{C}\in U$とする．0でない$*$複素係数の$*$多項式πで，あらゆる$z\in\boldsymbol{C}$に対して$\pi(z)=0$となるものが存在する．実際，複素係数の多項式の全体を$\boldsymbol{P}$とすれば$\boldsymbol{P}\in U$．$\mathscr{L}$の二変項論理式$\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})$として《$\mathrm{x}\in\boldsymbol{C}\wedge\mathrm{y}\in\boldsymbol{P}\wedge\mathrm{y}\neq0\wedge\mathrm{y}\ \mathrm{ap}\ \mathrm{x}=0$》を取り，共起性の原理を使えばよい．

つぎの三つの定理は超準解析で決定的な重要性をもつ．定理はモデル$^\circ\mathscr{U}$の広大化$^*\mathscr{U}$の性質として述べる．広大モデルの場合は$^\circ\mathscr{U}$を$\mathscr{U}$に，飽和モデルの場合は$^\circ\mathscr{U}$を$^*\mathscr{U}$に読みかえればよい．

3.1.11 定理 $^*\mathscr{U}$を$^\circ\mathscr{U}$の〘κ級〙広大化とする．$^\circ U$の任意の部分集合A〘$|A|\leqslant\kappa$〙（$^\circ U$の元とは限らない）を含む$*$有限集合が存在する．正確には，$*$有限集合Γ（$\Gamma\in{}^*U$）が存在し，任意の$x\in A$に対して${}^*x\,{}^*{\in}\,\Gamma$となる．ただし，$^\circ U$の元xに対し，$^*x$は$^*U$の元${}^*\iota({}^\circ\iota^{-1}(x))$を表わす．

証明 $\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})$として《$\mathrm{y}$ (finite set)$\wedge\mathrm{x}\in\mathrm{y}$》を取る．$\phi$は$A$上$^\circ\mathscr{U}$の中で有限共起的だから，共起性の原理によって$A$上$^*\mathscr{U}$の中で共起する．∎

3.1.12 定理 $^*\mathscr{U}$を$^\circ\mathscr{U}$の〘κ級〙広大化とし，$\mathscr{S}$を$^\circ U$に属する○集合から成る有限交差族〘で$|\mathscr{S}|\leqslant\kappa$なるもの〙とする（$\mathscr{S}\in{}^\circ U$とは限らない）．このとき，$\bigcap\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{S}\}\neq\varnothing$．すなわち，$^*U$の元$\xi$で，あらゆる$A\in\mathscr{S}$に対して$\xi\,{}^*{\in}\,{}^*A$なるものが存在する（$\hat{A}$は$\hat{}\,({}^*A)$の略記である）．

証明 $\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})$として《$\mathrm{y}\in\mathrm{x}$》を取ると，$\phi$は$\mathscr{S}$上$^\circ U$の中で有限共起的である．したがって$\mathscr{S}$上$^*U$の中で共起する．∎

3.1.13　定理　　前定理の記号と仮定のもとで，とくに$\mathscr{S}$が$°U$に属し，しかもフィルター基底の性質《$A, B\in\mathscr{S}$ なら，$C\subset A\cap B$ なる$\mathscr{S}$の元Cが存在する》をもつとする．このとき，$^*\mathscr{S}$の$*$元Γで，$\hat{\Gamma}\subset\bigcap\{\hat{A}\,;A\in\mathscr{S}\}$なるものが存在する．

証明　　$\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ として《$\mathrm{y}\in\mathscr{S}\wedge\mathrm{y}\subset\mathrm{x}$》を取ると，$\phi$は$\mathscr{S}$上$°U$の中で有限共起的である．したがって$\mathscr{S}$上$^*U$の中で共起する．すなわち，$^*\mathscr{S}$の$*$元$\Gamma$が存在し，任意の $A\in\mathscr{S}$ に対して $\Gamma{}^*\!\subset{}^*A$ となる．▮

注意　　一番弱い広大モデルないし飽和モデルの定義はこの定理と同値である．たとえば [15] を見よ．

飽和モデルに特有の性質

3.1.14　命題　　$^*\mathscr{U}$をκ級飽和モデルとする．$^*U$の部分集合Aが内的ならば，Aの濃度は有限か，またはκより大きい．

証明　　Aは有限でないとし，$A=\hat{\Gamma}$，$\Gamma\in{}^*U$とする．Aの元ξに対して決まる$^*\mathscr{L}$の一変項論理式《$\mathrm{x}\in\Gamma\wedge\mathrm{x}\neq\xi$》を$\phi_\xi$とする．$\mathscr{A}=\{\phi_\xi\,;\xi\in A\}$は有限共起的だから，もし $|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$ なら$^*U$の中で共起する．すなわち，Aの元βが存在し，Aのあらゆる元ξに対して$\beta\neq\xi$となってしまう．▮

3.1.15　例　　$^*\mathscr{U}$をκ級飽和モデルとする．$\hat{\boldsymbol{R}}$に順序位相を入れる．$\hat{\boldsymbol{R}}$の部分集合Aの濃度がκを超えなければAは離散である．とくに$\hat{\boldsymbol{R}}$の点列（$\boldsymbol{N}$から$\hat{\boldsymbol{R}}$への写像）は，ある番号から先が全部等しくないかぎり収束しない．

証明　　Aの元βを取り，$A-\{\beta\}$の元ξに対して決まる$^*\mathscr{L}$の一変項論理式《$\mathrm{x}\in\boldsymbol{R}^{++}\wedge\mathrm{x}\leqslant|\xi-\beta|$》を $\phi_\xi(\mathrm{x})$ とする（$\boldsymbol{R}^{++}=\{x\in\hat{\boldsymbol{R}}\,;x>0\}$）．$\mathscr{A}=\{\phi_\xi\,;\xi\in A-\{\beta\}\}$ と置くと，$\mathscr{A}$は有限共起的であり，その濃度はκを超えない．したがって，共起性の原理により，$^*U$の元εが存在し，あらゆる$\xi\in A-\{\beta\}$に対して $\phi_\xi(\beta)$ が$*$真となる．すなわち，$\varepsilon\in\hat{\boldsymbol{R}}$，$\varepsilon>0$，$\varepsilon\leqslant|\xi-\beta|$．よって$\beta$は孤立点である．▮

3.1.16　定理（写像の延長定理）　　$^*\mathscr{U}$をκ級飽和モデル，α,βを$*$集合，

C を $\hat{\alpha}$ の部分集合で $|C|\leqslant\kappa$ なるものとする．このとき，C から $\hat{\beta}$ への写像は $\hat{\alpha}$ から $\hat{\beta}$ への内写像に延長される．正確には，C から $\hat{\beta}$ への写像 f に対し，α から β への＊写像 φ が存在し，$\hat{\varphi}|C=f$ となる．

証明　C の元 ξ に対し，《$\mathsf{x}(\mathrm{map}:\alpha\longrightarrow\beta)\wedge\mathsf{x}\ \mathsf{ap}\ \xi=f(\xi)$》なる $^*\mathscr{L}$ の一変項論理式を ϕ_ξ とする．$\mathscr{A}=\{\phi_\xi\ ;\ \xi\in C\}$ とすると $|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$．$\mathscr{A}$ は有限共起的である．実際，$\mathscr{A}$ の有限個の論理式 $\phi_{\xi_1},\cdots,\phi_{\xi_n}$ に対し，$\hat{\alpha}$ から $\hat{\beta}$ への写像 F を，$F(\xi_i)=f(\xi_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，$\xi\neq\xi_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ なら $F(\xi)=f(\xi_1)$ として定める．F が内的であることを言えば，$\mathscr{A}$ が有限共起的であることが示されたことになる．さて，$^*\mathscr{L}$ の一変項論理式 $\phi(\mathsf{z})$ を（略式で）

$$\mathsf{z}=\mathsf{u}\ \mathsf{pr}\ \mathsf{v}\wedge\mathsf{u}\in\alpha\wedge\mathsf{v}\in\beta\wedge[\mathsf{u}=\xi_1\rightarrow\mathsf{v}=f(\xi_1)]\wedge\cdots$$
$$\wedge[\mathsf{u}=\xi_n\rightarrow\mathsf{v}=f(\xi_n)]\wedge[\mathsf{u}\neq\xi_1\wedge\cdots\wedge\mathsf{u}\neq\xi_n\rightarrow\mathsf{v}=f(\xi_1)]$$

とすると，$^*U$ の任意の元 η に対し，

$$\eta\in F \Longleftrightarrow \eta^*\in\alpha^*\times\beta \text{ かつ } \phi(\eta) \text{ が＊真}$$

が成りたつ．内集合の判定定理 **2.5.6** により，F は内写像である．

$^*\mathscr{U}$ は κ 級飽和モデルだから，共起性の原理によって $\mathscr{A}$ は共起的，したがって $^*U$ の元 φ が存在し，あらゆる $\xi\in C$ に対して $\phi_\xi(\varphi)$ は＊真となる．すなわち，φ は α から β への＊写像で，$\xi\in C$ に対しては $\varphi(\xi)=f(\xi)$ となる．▮

注意　1）この定理を超冪モデルでの写像の延長定理 **2.5.8** と比較せよ．また，第二章練習問題 **5** はいまの定理の特別な場合である．

§2　正則超フィルターによる広大モデルの構成

濃度に関する補題

3.2.1　補題　無限集合 X の有限列の全体 $\mathscr{Q}(X)$ および有限部分集合の全体 $\mathscr{S}(X)$ はともに X と等濃である．

証明　$|X|\leqslant|\mathscr{S}(X)|\leqslant|\mathscr{Q}(X)|$ は，明らかだから，$|X|=\kappa$ として，$|\mathscr{Q}(X)|\leqslant\kappa$ を言えばよい．n 個の項から成る列の全体は X^n だから，$\mathscr{Q}(X)=\bigcup_{n\in N}X^n$．$n\geqslant1$ なら $|X^n|=\kappa^n=\kappa$ だから，X から X^n への双射 f_n が存在する．$n=0$ に対しては $f_0(x)=\varnothing$ $(x\in X)$ とおく（$X^0=\{\varnothing\}$ である）．

$X \times \boldsymbol{N}$ から $\mathscr{Q}(X)$ への写像 f を，$f(x, n)=f_n(x)$ によって定める．$\mathscr{Q}(X)$ の任意の元 y はある X^n に属するから，ある $x \in X$ が存在して $y=f_n(x)$ となる．すなわち f は上射である．したがって，$|\mathscr{Q}(X)| \leqslant |X \times \boldsymbol{N}| = \kappa \cdot \omega \leqslant \kappa^2 = \kappa$. ∎

3.2.2　補題　X を無限集合，$\{E_x\,;\, x \in X\}$ を有限集合の族とする．このとき，$|\bigcup_{x \in X} E_x| \leqslant |X|$. もしこの族が無共分族（$x \neq y \Rightarrow E_x \cap E_y = \varnothing$）で，どの x に対しても $E_x \neq \varnothing$ なら等号が成立つ.

証明　前半さえ証明できれば後半は明らかである．$|E_x|=n$ なら，$[0, n-1]$ から E_x への双射 f_x が存在する．n 以上の整数 k に対して $f_x(k)=\varnothing$ とおくと，$\boldsymbol{N}$ から $\bar{E}_x = E_x \cup \{\varnothing\}$ への写像 f_x は上射である．$X \times \boldsymbol{N}$ の元 (x, n) に対して $f(x, n)=f_x(n)$ と置く．$\bar{E} = \bigcup_{x \in X} \bar{E}_x$ の任意の元 y はある $\bar{E}_x$ に属するから，ある $k \in \boldsymbol{N}$ が存在して $y=f_x(k)=f(x, k)$ となる．すなわち $f : X \times \boldsymbol{N} \to \bar{E}$ は上射である．したがって，$|\bigcup_{x \in X} E_x| \leqslant |\bigcup_{x \in X} \bar{E}_x| \leqslant |X \times \boldsymbol{N}| = |X| \cdot \omega = |X|$. ∎

正則超フィルター

3.2.3　定義　I を無限集合，$\mathscr{F}$ を I 上の超フィルターとし，κ を無限基数とする．濃度 κ の集合 T および T から $\mathscr{F}$ への写像 f がつぎのたがいに同値な条件をみたすとき，対 (T, f) を $\mathscr{F}$ の κ **級正則対**と言う：

a)　T の任意の無限部分集合 S に対し，$\bigcap_{t \in S} f(t) = \varnothing$.

b)　各 $i \in I$ に対し，$f^{\#}(i) = \{t \in T\,;\, i \in f(t)\}$ は有限である.

κ 級正則対が存在するとき，超フィルター $\mathscr{F}$ は κ **級正則**（κ-regular）であると言う．とくに $|I|$ 級正則を単に**正則**，ω 級正則を**可算級正則**と言う．

二条件の同値性：まず，$i \in I$, $t \in T$ に対し，$i \in f(t) \Leftrightarrow t \in f^{\#}(i)$.

a) $\Rightarrow$ b)　$i \in \bigcap_{t \in f^{\#}(i)} f(t)$. よって $f^{\#}(i)$ は有限.

b) $\Rightarrow$ a)　$\bigcap_{t \in S} f(t) \ni i$ とすると，任意の $t \in S$ に対して $i \in f(t)$. よって $t \in f^{\#}(i)$. したがって $S \subset f^{\#}(i)$. だから S は有限. ∎

3.2.4　命題　1)　$\lambda \leqslant \kappa$ なら，κ 級正則超フィルターは λ 級正則である.

2) $\mathscr{F}$ が自由であることと可算級正則であることは同値である．したがって κ 級正則超フィルターは自由である．

証明 1) (T, f) を $\mathscr{F}$ の κ 級正則対とする．T の部分集合 S で，$|S|=\lambda$ なるものが存在する．f の S への制限を g とすれば，(S, g) は λ 級正則対である．

2) $\mathscr{F}$ が自由なら，I の部分集合の族 $\{J_n ; n\in N\}$ が存在し，$J_n\in\mathscr{F}$，$J_n\supset J_{n+1}$，$\bigcap_{n\in N} J_n=\emptyset$ である（命題 1.1.12 b)）．$f(n)=J_n$ とすると，(N, f) は $\mathscr{F}$ の可算級正則対である．

逆に $\mathscr{F}$ が ω 級正則とする．T の素性が何であるかは問題でないから $T=N$ としてよい．$f(n)\in\mathscr{F}$，$\bigcap_{n\in N} f(n)=\emptyset$ だから $\mathscr{F}$ は自由である（定義 1.1.11）．∎

3.2.5 定理 任意の無限集合 I 上に正則超フィルターが存在する．

証明 補題 **3.2.1** により，I から I の有限部分集合の全体 $\mathscr{S}(I)$ への双射 g が存在する．$i\in I$ に対し，$f(i)=\{j\in I ; i\in g(j)\}$ と置く．I の元 i, j に対し，$i\in g(j) \Longleftrightarrow j\in f(i)$．$\mathscr{E}=\{f(i) ; i\in I\}$ は有限交差的である．実際，I の元 $i_1, \cdots, i_n$ に対し，ある $i_0\in I$ を取ると，$g(i_0)=\{i_1, \cdots, i_n\}$ となる．$1\leqslant m\leqslant n$ に対し，$i_m\in g(i_0)$，よって $i_0\in f(i_m)$．したがって $\mathscr{E}$ は有限交差的である．$\mathscr{E}$ を含む超フィルター $\mathscr{F}$ を取ると，f は I から $\mathscr{F}$ への写像である．J を I の部分集合とし，$\bigcap_{i\in J} f(i)\neq\emptyset$ とする．その元 j を取ると，$i\in J$ なら $j\in f(i)$，よって $i\in g(j)$．したがって $J\subset g(j)$ となり，J は有限集合である．すなわち (I, f) は $\mathscr{F}$ の $|I|$ 級正則対である．∎

3.2.6 命題 1) $\mathscr{F}$ が κ 級正則なら，$\mathscr{F}$ の任意の元の濃度は κ より小さくない．とくに $\mathscr{F}$ が正則なら，その元はすべて I と等濃である（この性質をもつ超フィルターを**一様超フィルター** (uniform ultrafilter) と言う）．

2) $\kappa>|I|$ なら κ 級正則超フィルターは存在しない．

証明 1) $A\subset I$，$|A|<\kappa$ とする．(T, f) を $\mathscr{F}$ の κ 級正則対とする．I の元 j に対し，$f^*(j)$ は有限だから，補題 **3.2.2** により $|\bigcup_{j\in A} f^*(j)|\leqslant|A|<|T|$．したがって T の元 t で，$\bigcup_{j\in A} f^*(j)$ に属さないものが存在する．$f(t)$ と A とは共通元をもたない．実際，$j\in f(t)$ なら $t\in f^*(j)$，よって $j\notin A$．$f(t)\in\mathscr{F}$ だから A は $\mathscr{F}$ に属さない．

2)　1) から明らか．▮

3.2.7　系　　可算集合 I 上の超フィルターに対し，非単項，自由，一様，可算級正則，正則はたがいに同値な条件である．

証明　　定義によって《可算級正則 $\Longleftrightarrow$ 正則》．命題 **1.1.13** によって《非単項 $\Longleftrightarrow$ 自由》．命題 **3.2.4** によって《自由 $\Longleftrightarrow$ 可算級正則》．前命題によって《正則 $\Longrightarrow$ 一様》．命題 **1.1.9** によって《一様 $\Longrightarrow$ 非単項》．▮

正則超冪モデル

3.2.8　定理　　$\mathscr{U}$ を標準モデル，I を無限集合，κ を無限基数，$\mathscr{F}$ を I 上の κ 級正則超フィルターとする．このとき，$\mathscr{F}$ を法とする超冪モデル $^*\mathscr{U}$ は κ 級広大モデルである．

証明　　$\mathscr{A}$ を $\mathscr{L}$ の一変項論理式の集合で，その濃度が κ を超えず，しかも U の中で有限共起的なものとする．$\mathscr{A}$ が $^*U$ の中で共起することを示す．

1°　$\mathscr{F}$ の κ 級正則対 (T, f) を取る．$f^\#$ は I から $\mathscr{S}(T)$（T の有限部分集合の全体）への写像である．$|T|=\kappa$ だから，T から $\mathscr{A}$ への上射 g が存在する．これの引起す $\mathscr{S}(T)$ から $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ への上射を $\bar{g}$ と書く：$u\in\mathscr{S}(T)$ に対し，$\bar{g}(u)=\{g(t)\,;\,t\in u\}$.

2°　$h=\bar{g}\circ f^\#$ は I から $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ への写像である．I の元 i に対し，$h(i)\in\mathscr{S}(\mathscr{A})$ だから，仮定により，U の元 b_i が存在し，$h(i)$ に属するあらゆる一変項論理式 ϕ に対して $\phi(b_i)$ は真となる．$\beta(i)=b_i$ によって $^*U$ の元 $\beta=[\beta(i)]$ を定める．任意の $\phi\in\mathscr{A}$ に対して $\phi(\beta)$ が＊真であればよい．

$g(t)=\phi$ なる T の元 t を取る．$i\in f(t)$ なら $t\in f^\#(i)\in\mathscr{S}(T)$．したがって $\phi=g(t)\in\bar{g}(f^\#(i))=h(i)$．よって $\phi(b_i)$ は真．すなわち，

$$\{i\in I\,;\,\models\phi(\beta(i))\}\supset f(t).$$

右辺は $\mathscr{F}$ に属するから左辺も $\mathscr{F}$ に属する．したがって，ウォッシュの定理 **2.4.3** によって $\phi(\beta)$ は＊真である．▮

3.2.9　系　　1)　$\mathscr{F}$ が $|U|$ 級正則なら $^*\mathscr{U}$ は広大モデルである（このとき必然的に $|I|\geqq|U|$）．とくに，$|I|\geqq|U|$ で $\mathscr{F}$ が正則なら $^*\mathscr{U}$ は広大モデルである．したがって広大モデルは存在する．

2) $\mathscr{F}$が自由なら$^*\mathscr{U}$は可算級広大モデルである．とくに，第一章の所論は，可算級広大モデルでの話とみなされる．

3.2.10 注意 第一章の無限小解析は，超冪モデルでなくても，可算級広大モデル（$\boldsymbol{R}\in U$とする）であればすべて成立つ（練習問題8は除く）．これを全部実行してみるのはよい練習になるだろう．しかし，ここでは函数の連続性の定義の言いかえ（定理**1.3.4**の1)）だけやってみよう（定理**4.2.5**および［3］も見よ）．

1° fがaで連続とする．$\xi\fallingdotseq a$とする．任意の正実数eに対し，ある正実数dを取ると，$\mathscr{L}$の文

$$\forall \mathrm{x}[\mathrm{x}\in\boldsymbol{R}\wedge|\mathrm{x}-a|\leqslant d\rightarrow|f(\mathrm{x})-f(a)|\leqslant e]$$

は真，したがって＊真である．$|\xi-a|\leqslant d$ だから $|^*f(\xi)-f(a)|\leqslant e$. eは任意だから $^*f(\xi)\fallingdotseq f(a)$.

2° $\xi\fallingdotseq a$ なら $^*f(\xi)\fallingdotseq f(a)$ とする．正実数eを取る．正の無限小超実数δを取ると，$|\xi-a|\leqslant\delta$ なら $\xi\fallingdotseq a$ だから $^*f(\xi)\fallingdotseq f(a)$となる．したがって $|^*f(\xi)-f(a)|\leqslant e$. よって$\mathscr{L}$の文

$$\exists \mathrm{x}[\mathrm{x}\in\boldsymbol{R}\wedge \mathrm{x}>0\wedge\forall \mathrm{y}[\mathrm{y}\in\boldsymbol{R}\wedge|\mathrm{y}-a|\leqslant \mathrm{x}\rightarrow|f(\mathrm{y})-f(a)|\leqslant e]]$$

は＊真である（xをδに，yをξに解釈する）．したがってモデル同値の原理により，これは$\mathscr{U}$でも真である．eは任意だから，これはfの連続性を表わす式にほかならない．∎

正則超冪の濃度

3.2.11 定理 Iを濃度κの無限集合，$\mathscr{F}$をI上のλ級正則超フィルター（$\lambda\leqslant\kappa$），Xを無限集合とする．$\mathscr{F}$を法とするXの超冪$^*X$の濃度は$|X|^\lambda$より小さくない．とくに$\mathscr{F}$が正則なら $|^*X|=|X|^\kappa$ $(=|{}^IX|)$.

証明 (T,f)を$\mathscr{F}$のλ級正則対とする．Xの有限列の全体 $\mathscr{Q}(X)$ を$\mathscr{Q}$と書くと，補題**3.2.1**によって $|\mathscr{Q}|=|X|$. したがって $|^*\mathscr{Q}|=|^*X|$. Tに全順序 $\leqslant$（たとえば選択公理によって存在の保証される整列順序）を入れておく．${}^TX$の元g，すなわちTからXへの写像gを取る．Iの元iに対し，有限集合 $f^\#(i)=\{t\in T\,;\,i\in f(t)\}$ の元全部を $\leqslant$ の順に $t_1<\cdots<t_n$. とし，

$$g'(i)=(g(t_1),\cdots,g(t_{n_i}))\in\mathscr{Q}$$

と置く．g' は I から $\mathscr{Q}$ への写像，すなわち ${}^I\mathscr{Q}$ の元である．${}^*\mathscr{Q}$ の元は，${}^I\mathscr{Q}$ の $\mathscr{F}$ を法とする類である．g' を含む類を $\bar{g}$ と書く（$\bar{g}\in{}^*\mathscr{Q}$）．

こうして ${}^TX$ から ${}^*\mathscr{Q}$ への写像 $\varphi : g\mapsto\bar{g}$ ができた．φ が単射であることが言えれば，$|X|^\lambda=|{}^TX|\leqslant|{}^*\mathscr{Q}|=|{}^*X|$ となって証明を終る．さて，g_1, g_2 を ${}^TX$ の相異なる二元とすると，T のある元 t に対して $g_1(t)\neq g_2(t)$．$i\in f(t)$ なら，ある k（$1\leqslant k\leqslant n_i$）によって $t=t_k$ と書ける．したがって，

$$g_1'(i)=(\cdots,g_1(t),\cdots)\neq(\cdots,g_2(t),\cdots)=g_2'(i).$$

よって $f(t)\subset\{i\in I\,;\,g_1'(i)\neq g_2'(i)\}$．左辺は $\mathscr{F}$ に属するから右辺も $\mathscr{F}$ に属し，超冪の定義によって $\bar{g}_1\neq\bar{g}_2$ となる．▮

§3　善良超フィルターによる飽和モデルの構成

善良超フィルター

3.3.1　定義　　X, Y を集合の集合とする．

1)　$a, b\in X$ なら $a\cap b\in X$ となるとき，X は**乗法的**であると言う．

2)　X から Y への写像 f が**増加写像**であるとは，$a, b\in X$，$a\subset b$ ならば $f(a)\subset f(b)$ となることである．

3)　f, g を X から Y への写像とする．任意の $a\in X$ に対して $f(a)\subset g(a)$ となるとき，$f\leqslant g$ と書く．

4)　X, Y がともに乗法的なとき，X から Y への写像 f が**乗法的**であるとは，$a, b\in X$ なら $f(a\cap b)=f(a)\cap f(b)$ となることである．

5)　X, Y を乗法的な集合とする．X から Y への任意の増加写像 f に対し，X から Y への乗法写像 h で $h\leqslant f$ なるものが存在するとき，対（X, Y）は**善良**（good）であると言う．

3.3.2　定義　　κ を無限基数，I を無限集合とする．I 上の超フィルター $\mathscr{F}$ がつぎの二つの条件をみたすとき，$\mathscr{F}$ を κ **級善良超フィルター**（κ-good ultrafilter）と言う．$|I|$ 級善良超フィルターを単に**善良超フィルター**と言う：

a)　$\mathscr{F}$ は自由超フィルターである．

b) 濃度κの集合Tで，対 $(\mathscr{F}_0(T), \mathscr{F})$ が善良であるようなものが存在する（$\mathscr{F}_0(T)$ はT上のフレシェ・フィルター）.

3.3.3 命題 1) $(\mathscr{F}_0(T), \mathscr{F})$ が善良なら，Tと等濃な任意の集合T'に対して $(\mathscr{F}_0(T'), \mathscr{F})$ は善良である．だから， 定義の条件 b) はつぎのように言ってもよい：濃度κの任意の集合Tに対し，対 $(\mathscr{F}_0(T), \mathscr{F})$ は善良である.

2) $(\mathscr{F}_0(T), \mathscr{F})$ が善良ならば，$|S| \leqslant |T|$ なる任意の集合 S に対して $(\mathscr{F}_0(S), \mathscr{F})$ は善良である．だから，$\lambda \leqslant \kappa$ で$\mathscr{F}$がκ級善良なら，$\mathscr{F}$はλ級善良である.

証明 1) TからT'への双射φが存在し，それは$\mathscr{F}_0(T)$ から$\mathscr{F}_0(T')$への双射$\bar{\varphi}$を定める．すなわち，$A \in \mathscr{F}_0(T)$ に対し，$\bar{\varphi}(A) = \{\varphi(t) ; t \in A\}$. $\bar{\varphi}$は包含関係および共通部分を保つ．すなわち，$A, B \in \mathscr{F}_0(T)$ に対し，$A \subset B \Longleftrightarrow \bar{\varphi}(A) \subset \bar{\varphi}(B)$ であり， また $\bar{\varphi}(A \cap B) = \bar{\varphi}(A) \cap \bar{\varphi}(B)$ である． だから，$\mathscr{F}_0(T')$ から$\mathscr{F}$への増加写像 f' に対し，$f = f' \circ \bar{\varphi}$ は$\mathscr{F}_0(T)$ から$\mathscr{F}$への増加写像，よって$\mathscr{F}_0(T)$ から$\mathscr{F}$への乗法写像hで，$h \leqslant f$ なるものが存在する．$h' = h \circ \bar{\varphi}^{-1}$ と置けばよい.

2) 1) により，$S \subset T$ としてよい． $\mathscr{F}_0(S)$ から$\mathscr{F}$への増加写像fに対し，$\mathscr{F}_0(T)$ から$\mathscr{F}$への写像f'を，$A \in \mathscr{F}_0(T)$ に対して $f'(A) = f(A \cap S)$ として定める．f'は増加写像だから， $\mathscr{F}_0(T)$ から$\mathscr{F}$への乗法写像h'で，$h' \leqslant f'$ なるものが存在する．$\mathscr{F}_0(S)$ の元Aに対し，$h(A) = h'(A \cup (T-S))$ と置く（$A \cup (T-S) \in \mathscr{F}_0(T)$）．$h(A)$ は$\mathscr{F}$に属し，$h(A) \subset f'(A \cup (T-S)) = f(A)$. よって $h \leqslant f$. hが乗法的であることも簡単に分る. ∎

3.3.4 定理 κ級善良超フィルターはκ級正則である．とくに善良超フィルターは正則である.

証明 1° $\mathscr{F}$は自由だから，$\mathscr{F}$の元の可算族 $\{J_n ; n \in N\}$ で，$J_n \supset J_{n+1}$, $\bigcap_{n \in N} J_n = \varnothing$ なるものが存在する．$\mathscr{F}$はκ級善良だから， 濃度κの集合Tで，対 $(\mathscr{F}_0(T), \mathscr{F})$ が善良なものが存在する． $\mathscr{F}_0(T)$ から$\mathscr{F}$への写像fを，$B \in \mathscr{F}_0(T)$ に対し，$f(B) = J_{|B'|}$ によって定める（$B' = T - B$）．fは増加写像である．実際，$B_1 \subset B_2$ なら $|B_1'| \geqslant |B_2'|$ だから，$J_{|B_1'|} \subset J_{|B_2'|}$ となる.

したがって，$\mathscr{F}_0(T)$ から $\mathscr{F}$ への乗法写像 h で，$h \leqslant f$ なるものが存在する．

2°　T の元 t に対し，$B_t = T - \{t\} \in \mathscr{F}_0(T)$ と置き，$g(t) = h(B_t) \in \mathscr{F}$ と置く．(T, g) が $\mathscr{F}$ の κ 級正則対であることを示す．そのためには，I の任意の元 i に対し，$g^*(i) = \{t \in T \,;\, i \in g(t)\}$ が有限集合であることを言えばよい．

I の元 i に対し，$n(i) = \min\{n \in \boldsymbol{N} \,;\, i \notin J_n\}$ と置くと，$|g^*(i)| < n(i)$ が成立つ．実際，もしある i に対して $|g^*(i)| \geqslant n(i)$ とすると，$g^*(i)$ の部分集合 S で，$n(i)$ 個の元から成るものが存在する．$t \in S$ なら $t \in g^*(i)$ だから $i \in g(t)$．よって，

$$i \in \bigcap_{t \in S} g(t) = \bigcap_{t \in S} h(B_t) = h\Bigl(\bigcap_{t \in S} B_t\Bigr) \subset f\Bigl(\bigcap_{t \in S} B_t\Bigr) = J_{n(i)}$$

となり，$n(i)$ の定義に反する．∎

3.3.5　定理　　任意の自由超フィルターは可算級善良である．

証明　　対 $(\mathscr{F}_0(\boldsymbol{N}), \mathscr{F})$ が善良であることを言えばよい．f を $\mathscr{F}_0(\boldsymbol{N})$ から $\mathscr{F}$ への増加写像とする．$\mathscr{F}_0(\boldsymbol{N})$ の元 A に対し，A に属さない最大の整数を $m(A)$ と書く．また，$n \in \boldsymbol{N}$ に対し，$C_n = \{m \in \boldsymbol{N} \,;\, m > n\}$ と置くと，$C_n \in \mathscr{F}_0(\boldsymbol{N}), C_{m(A)} \subset A$．$\boldsymbol{N}$ の元 m, n に対し，$f(C_{\max(m,n)}) = f(C_m) \cap f(C_n)$．

$\mathscr{F}_0(\boldsymbol{N})$ の元 A に対し，$h(A) = f(C_{m(A)})$ と置くと，$h(A) \in \mathscr{F}$．また，$h(A) \subset f(A)$，すなわち $h \leqslant f$．$A, B \in \mathscr{F}_0(\boldsymbol{N})$ に対し，

$$\begin{aligned} h(A \cap B) &= f(C_{m(A \cap B)}) = f(C_{\max(m(A), m(B))}) \\ &= f(C_{m(A)}) \cap f(C_{m(B)}) = h(A) \cap h(B). \end{aligned}$$

すなわち h は乗法的である．∎

3.3.6　定理　　任意の無限集合上に善良超フィルターが存在する．

証明は非常に難かしい．付録 I を見よ．

善良超冪モデル

3.3.7　定理　　κ を無限基数，I を無限集合，$\mathscr{F}$ を I 上の κ 級善良超フィルターとする．$\mathscr{F}$ を法とする超冪モデル ${}^*\mathscr{U}$ は κ 級飽和モデルである．

証明 1° $\mathscr{A}$ を $^*\mathscr{L}$ の一変項論理式の集合で $|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$ かつ有限共起的なものとする．選択公理により，$^*U$ の各元 α に対して代表 $(\alpha(i))$ を指定しておく．$\mathscr{A}$ に属する論理式 ϕ に対し，ϕ に現われる定項 α をすべて $\alpha(i)$ で置きかえて得られる $\mathscr{L}$ の論理式を ϕ_i とする．

$\mathscr{A}$ の部分集合 $\mathscr{B}$ に対し，$\mathscr{A}-\mathscr{B}$ を $\mathscr{B}'$ と書く．また，$\mathscr{B}\langle i\rangle=\{\phi_i\,;\,\phi\in\mathscr{B}\}$ と置く．

2° $\mathscr{A}$ 上のフレシェ・フィルター $\mathscr{F}_0(\mathscr{A})$ の元 $\mathscr{B}$ に対し，I の元 i で，$\mathscr{B}'\langle i\rangle$ が U の中で共起するようなものの全体（I の部分集合）を $g(\mathscr{B})$ と置く．すると，$g(\mathscr{B})$ は $\mathscr{F}$ に属し，g は $\mathscr{F}_0(\mathscr{A})$ から $\mathscr{F}$ への増加写像である．

実際，$\mathscr{B}'$ は $\mathscr{A}$ の有限部分集合だから，$^*U$ の元 γ が存在し，任意の $\phi\in\mathscr{B}'$ に対して $\phi(\gamma)$ が $*$ 真となる．$\mathscr{B}'=\{\phi^1,\cdots,\phi^n\}$ としよう．$^*\mathscr{L}$ の文 $\phi^1(\gamma)\wedge\cdots\wedge\phi^n(\gamma)$ は $*$ 真である． ウォッシュの定理 **2.4.3** により， $\mathscr{L}$ の文 $\phi^1_i(\gamma(i))\wedge\cdots\wedge\phi^n_i(\gamma(i))$ が真であるような $i\in I$ の全体 $J_{\mathscr{B}}$ は $\mathscr{F}$ に属する．$i\in J_{\mathscr{B}}$ なら $\mathscr{B}'\langle i\rangle$ は U の中で共起するから $J_{\mathscr{B}}\subset g(\mathscr{B})$．したがって $g(\mathscr{B})$ は $\mathscr{F}$ に属する．

$\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}_2$ なら $\mathscr{B}_1'\supset\mathscr{B}_2'$ だから，g の定義によって $g(\mathscr{B}_1)\subset g(\mathscr{B}_2)$．

3° $\mathscr{F}$ は自由超フィルターだから，$\mathscr{F}$ の元の可算族 $\{J_n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}$ で，$J_n\supset J_{n+1}$，$\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}J_n=\varnothing$ なるものがある．$\mathscr{F}_0(\mathscr{A})$ の元 $\mathscr{B}$ に対し，$f(\mathscr{B})=g(\mathscr{B})\cap J_{|\mathscr{B}'|}$ と置く．明らかに $f(\mathscr{B})\in\mathscr{F}$，$f\leqslant g$ である．さらに，f は増加写像である．実際，$\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}_2$ なら $|\mathscr{B}_1'|\geqslant|\mathscr{B}_2'|$ だから

$$f(\mathscr{B}_1)=g(\mathscr{B}_1)\cap J_{|\mathscr{B}_1'|}\subset g(\mathscr{B}_2)\cap J_{|\mathscr{B}_2'|}=f(\mathscr{B}_2).$$

$\mathscr{F}$ は κ 級善良であり，$|\mathscr{A}|\leqslant\kappa$ だから，命題 **3.3.3** の 2) により，$\mathscr{F}_0(\mathscr{A})$ から $\mathscr{F}$ への乗法写像 h で，$h\leqslant f$ なるものが存在する．

4° $\mathscr{A}$ に属する論理式 ϕ に対して $\mathscr{A}_\phi=\mathscr{A}-\{\phi\}$ と置き，I の元 i に対して $\Delta_i=\{\phi\in\mathscr{A}\,;\,i\in h(\mathscr{A}_\phi)\}$ と置くと，Δ_i は有限集合である．

実際，$n(i)=\max\{n\in\boldsymbol{N}\,;\,i\in J_n\}$ とする．もしある i に対して $|\Delta_i|>n(i)$ とすると，Δ_i の部分集合 Γ で，$n(i)+1$ 個の元から成るものが存在し，

$$i\in\bigcap_{\phi\in\Gamma}h(\mathscr{A}_\phi)=h\Bigl(\bigcap_{\phi\in\Gamma}\mathscr{A}_\phi\Bigr)=h(\Gamma')\subset f(\Gamma')\subset J_{n(i)+1}$$

となって $n(i)$ の定義に反する．

5°　I の各元 i に対し，

$$i\in\bigcap_{\phi\in\varDelta_i}h(\mathscr{A}_\phi)=h\Big(\bigcap_{\phi\in\varDelta_i}\mathscr{A}_\phi\Big)=h(\varDelta_i')\subset g(\varDelta_i').$$

g の定義により，$\varDelta_i\langle i\rangle$ は U の中で共起する．すなわち，U の元 b_i が存在し，$\varDelta_i\langle i\rangle$ に属するあらゆる論理式 ϕ に対して $\phi(b_i)$ が真となる．

$\beta=[b_i]\in{}^*U$ と置く．$\beta(i)$ はすでに決まっているが，$\mathscr{F}$ に属するある J を取ると，$i\in J$ なら $\beta(i)=b_i$ である．$\mathscr{A}$ に属する任意の論理式 ϕ に対し，$i\in h(\mathscr{A}_\phi)\cap J$ なら $\phi\in\varDelta_i$，よって $\phi_i\in\varDelta_i\langle i\rangle$ となる．したがって $\phi_i(b_i)$ すなわち $\phi_i(\beta(i))$ は真である．$h(\mathscr{A}_\phi)\cap J\in\mathscr{F}$ だから，$\phi_i(\beta(i))$ が真であるような i の全体は $\mathscr{F}$ に属する．ふたたびウォッシュの定理によって $\phi(\beta)$ は＊真である．∎

3.3.8　系　　$\mathscr{F}$ が無限集合 I 上の自由超フィルターなら，$\mathscr{F}$ を法とする超冪モデル ${}^*\mathscr{U}$ は可算級飽和モデルである．

証明　　前定理および定理 **3.3.5** による．∎

注意　　したがって，第一章で扱ったモデルは可算級飽和モデルである．しかし，注意 **3.2.10** に書いたように，第一章の理論は可算級広大モデル ですべて成立つ．飽和モデルとしての性質を使ったのは練習問題 **8** だけである．

練　習　問　題

1.　無限集合 I 上の超フィルター $\mathscr{F}$ が κ 級正則ならば，$\mathscr{F}$ の部分集合 $\mathscr{E}$ で，$|\mathscr{E}|=\kappa$ であり，かつ $(\mathscr{E},\iota)$ が $\mathscr{F}$ の κ 級正則対であるものが存在する．ただし，ι は標準単射 $\mathscr{E}\to\mathscr{F}$，$i\mapsto i$ である．

2.　${}^*\mathscr{U}$ が可算級広大モデルなら，あらゆる整数 $(\neq 0)$ で割りきれるような超整数が存在する．そのようなものの全体 K は $\hat{\boldsymbol{Z}}$ のイデアルである．$\hat{\boldsymbol{Z}}$ の $\boldsymbol{Z}$ による各剰余類と K との共通部分は高々一つの元しかもたない．

3.　${}^*\mathscr{U}$ を $|U|$ 級飽和モデルとする．U に属する任意の可換群は＊有限可換群に埋めこまれる．${}^*\mathscr{U}$ が広大モデルならどうか．

4.　${}^*\mathscr{U}$ を広大モデル，X を U に属する集合，$\mathscr{S}$ を $\mathscr{P}(X)$ の有限交差的部分集合，Y を X の部分集合で，$\hat{Y}\subset\bigcup\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{S}\}$ なるものとする．このとき，$\mathscr{S}$ に属する有限個の $A_1,\cdots,A_n$ が存在し，$\hat{Y}\subset\hat{A}_1\cup\cdots\cup\hat{A}_n$ となる（補題 **4.5.7**）．同じこと

をモデル $°\mathscr{U}$ の κ 級広大化 $^*\mathscr{U}$ に対して定式化し，証明せよ．

5. $^*\mathscr{U}$ を広大モデル，G を U に属する可換群とする．$^*G$ の$*$有限部分集合 Γ を適当に取ると，G の任意の元 a に対して， $a\Gamma\sim\Gamma$，すなわち$\dfrac{^*|a\Gamma\triangle\Gamma|}{^*|\Gamma|}\fallingdotseq 0$ となる．ただし，$^*|\quad|$ は$*$濃度，$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$．

第四章　位　　相

この章では,《単子》という超準的概念を使って，位相空間の一般論を組織的に超準解析の言葉に書きかえる．応用として，いくつかのよく知られた定理を超準的手法で証明する．たとえばチホノフの定理がいと簡単に証明される．また，局所コンパクト群上のハール測度が,《無限小近傍》を使って見通しよく構成される．

U は宇宙で，考える対象はすべて U に属するとする．たとえば位相空間の族 $\{X_i\,;\,i\in J\}$ の直積を考えたいときは，$V=J\cup\bigcup_{i\in J}X_i$ とし，命題**2.1.5**のやりかたで U を作ればよい．もちろん $N\in U$ とする．

$^*\mathscr{U}$ は広大モデルとする．たとえば可算基をもつ位相空間の可算族だけを考えるのなら，可算級広大モデルで十分である．しかし，一々断らない．

§1　位相空間の単子

4.1.1　X が位相空間のとき，X の開集合の全体を $\mathscr{T}$ と書く．$\mathscr{T}$ のことを X の位相とも言う．X の点 a の近傍の全体を $\mathscr{V}(a)$，開近傍の全体を $\mathscr{T}(a)$ と書く．

$^*\mathscr{T}$ は $^*X$ 上の $*$位相であるが，これを $\hat{X}$ に移しても，そのままでは位相にならない（外集合が含まれない）．

混乱を生じる恐れがないかぎり，$X\subset\hat{X}$ とみなす．

4.1.2　定義　位相空間 X の点 a に対し，$\bigcap\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{V}(a)\}=\bigcap\{\hat{B}\,;\,B\in\mathscr{T}(a)\}$ を，この位相に関する点 a の**単子** (monad) または**モナド**と言い，$\mu(a)$ と書く．X の点 a に $\mu(a)$ を対応させる写像 $\mu: X\longrightarrow\mathscr{P}(\hat{X})$ を位相 $\mathscr{T}$ の**単子場**と言う．$\mu(a)$ の元は a に**無限に近い**と言われる．$\alpha\in\mu(a)$ のとき，$\alpha\fallingdotseq a$ と書く．$\hat{X}$ の元 α に対し，$\alpha\in\mu(a)$ なる X の点 a が存在するとき，α を $\hat{X}$ の**近標準点**と言う．そうでない点を**遠標準点**と言う．$\hat{X}$ の近標準点

の全体を $\mathscr{N}(X)$ と書く．

Y が X の部分位相空間のとき，Y の単子場を μ' とすれば，Y の元 a に対して $\mu'(a)=\mu(a)\cap\hat{Y}$ となる．証明はやさしい．

4.1.3 定理 X の点 a に対し，$^*\mathscr{T}(a)$ の$*$元（したがって $^*\mathscr{V}(a)$ の$*$元）Γ で，$\hat{\Gamma}\subset\mu(a)$ なるものが存在する．

証明 $^*\mathscr{T}(a)$ はフィルター基底だから，定理 3.1.13 を使えばよい．▮

注意 $^*\mathscr{V}(a)$ の$*$元 Γ で $\hat{\Gamma}\subset\mu(a)$ なるものを a の**無限小近傍**と言う．

4.1.4 定理 1) X の部分集合 A が開集合であるためには，A の任意の元 a に対して $\mu(a)\subset\hat{A}$ が成立つことが必要十分である．

2) X の部分集合 A および X の点 a に対し，$A\in\mathscr{V}(a) \Leftrightarrow \mu(a)\subset\hat{A}$.

証明 1) A が開集合なら $A\in\mathscr{T}(a)$，よって $\mu(a)\subset\hat{A}$．逆に，任意の $a\in A$ に対して $\mu(a)\subset\hat{A}$ とする．$^*\mathscr{T}(a)$ の$*$元 Γ で，$\hat{\Gamma}\subset\mu(a)$ なるものが存在する．仮定によって $\hat{\Gamma}\subset\hat{A}$ である．したがって$\mathscr{L}$の文 $\exists \mathsf{y}\ [\mathsf{y}\in\mathscr{T}\wedge a\in\mathsf{y}\wedge\mathsf{y}\subset A]$ は$*$真，したがってモデル同値の原理によって真である．すなわち，$\mathscr{T}(a)$ の元 C で $C\subset A$ なるものが存在する．

2) $A\in\mathscr{V}(a)$ なら，$\mu(a)$ の定義によって $\mu(a)\subset\hat{A}$．逆に $\mu(a)\subset\hat{A}$ とする．点 a の無限小近傍 Γ を取ると，$\hat{\Gamma}\subset\hat{A}$．したがって $\mathscr{L}$ の文 $\exists\mathsf{x}[\mathsf{x}\in\mathscr{V}(a)\wedge\mathsf{x}\subset A]$ は$*$真，よって真である．すなわち，a の近傍 C で $C\subset A$ なるものが存在する．▮

4.1.5 系 位相はその単子場によって決まる．すなわち $\mathscr{T},\mathscr{T}'$ を X 上の位相，μ,μ' をそれぞれの単子場とするとき，$\mu=\mu'$ なら $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$ である．

証明は前定理の 1) から明らかである．

注意 逆に，X から $\mathscr{P}(\hat{X})$ への写像がどんな性質をもてばある位相の単子場になるかについては §5 を見よ．

4.1.6 系 A を X の部分集合とする．

1) A が閉集合 $\Leftrightarrow$ a が A に属さなければ $\mu(a)\cap\hat{A}=\varnothing$.

2) A の閉包は $\mu(a)\cap\hat{A}\neq\varnothing$ なる X の点 a の全体である．

証明 1) 補集合を考えればよい．

2)　A の閉包を $\bar{A}$ と書く．$a \notin \bar{A}$ なら，1) によって $\mu(a) \cap \hat{\bar{A}} = \emptyset$．したがってもちろん $\mu(a) \cap \hat{A} = \emptyset$ である．逆に $a \in \bar{A}$ なら，任意の近傍 $B \in \mathscr{V}(a)$ に対し，$B \cap A \neq \emptyset$．よって $\mathscr{L}$ の文 $\forall \mathsf{x}[\mathsf{x} \in \mathscr{V}(a) \to \mathsf{x} \cap A \neq \emptyset]$ は真，したがって＊真である．とくに無限小近傍 Γ に対しても $\Gamma^* \cap {}^*A \neq {}^*\emptyset$．よって $\mu(a) \cap \hat{A} \neq \emptyset$．∎

§2　諸概念の超準的取扱い

分　離　性

4.2.1　定理　　X がハウスドルフ空間（分離空間とも言う）であるためには，X の任意の相異なる二点 a, b に対して $\mu(a) \cap \mu(b) = \emptyset$ となることが必要十分である．

証明　　X がハウスドルフなら，定義によって $A \in \mathscr{V}(a)$，$B \in \mathscr{V}(b)$ で $A \cap B = \emptyset$ なるものが存在する．よって $\mu(a) \cap \mu(b) \subset \hat{A} \cap \hat{B} = \emptyset$．

逆に条件がみたされているとき，a, b の無限小近傍 $\Gamma, \varDelta$ を取ると，$\hat{\Gamma} \cap \hat{\varDelta} \subset \mu(a) \cap \mu(b) = \emptyset$．　よって $\mathscr{L}$ の文 $\exists \mathsf{x} \exists \mathsf{y}[\mathsf{x} \in \mathscr{V}(a) \wedge \mathsf{y} \in \mathscr{V}(b) \wedge \mathsf{x} \cap \mathsf{y} = \emptyset]$ は＊真，したがってモデル同値の原理によって真である．それはハウスドルフの分離公理にほかならない．∎

4.2.2　定義　　X がハウスドルフなら，$\hat{X}$ の近標準点 α は唯一つの単子 $\mu(a)$ に属する．a を α の**標準部分**と言い，$\mathrm{st}(\alpha)$ と書く．近標準点 α, β の標準部分が等しいとき，α と β とはたがいに**無限に近い**と言い，$\alpha \fallingdotseq \beta$ と書く．これは近標準点の全体 $\mathscr{N}(X)$ 上の同値関係である．

注意　　これらは実数の場合の定義 **1.3.1** の拡張である．ただし，実数の場合と違って，遠標準点同志が無限に近いという概念は定義されない．それは位相群の一様構造に関係する．

4.2.3　命題　　位相空間 X の空でない部分集合 A に対し，A の近傍〘開近傍〙の全体を $\mathscr{V}(A)$〘$\mathscr{T}(A)$〙とし，$\bigcap \{\hat{B}\,;\, B \in \mathscr{V}(A)\} = \bigcap \{\hat{C}\,;\, C \in \mathscr{T}(A)\}$ を A の**単子**と言って $\mu(A)$ と書くことにする．このとき，${}^*\mathscr{T}(A)$

の$*$元Γで$\hat{\Gamma}\subset\mu(A)$なるもの（無限小開近傍）が存在する.

証明　$\mathscr{T}(A)$はフィルター基底だから定理**3.1.13**を使えばよい. ▮

4.2.4　定理　Xをハウスドルフ空間とする.

1)　Xが正則であるためには, Xの閉集合AおよびAに属さない点aに対し, $\mu(a)\cap\mu(A)=\varnothing$ が成立つことが必要十分である.

2)　Xが正規であるためには, 共通点のない閉集合A, Bに対し, $\mu(A)\cap\mu(B)=\varnothing$ が成立つことが必要十分である.

証明　定理**4.2.1**とまったく同様にできる. ただし, ハウスドルフ空間Xが正則であるとは, Xの閉集合Aおよび$a\notin A$に対し, $C\in\mathscr{T}(a)$, $D\in\mathscr{T}(A)$で$C\cap D=\varnothing$なるものが存在することである. また, Xが正規であるとは, 閉集合$A, B, A\cap B=\varnothing$に対し, $C\in\mathscr{T}(A)$, $D\in\mathscr{T}(A)$で$C\cap D=\varnothing$なるものが存在することである. ▮

注意　点の単子だけによる特徴づけについては定理**4.5.14**および定理**4.5.15**を見よ.

連続写像および積位相

4.2.5　定理　X, Yを位相空間とする. XからYへの写像fがXの点aで連続であるためには, $\hat{f}(\mu(a))\subset\mu'(f(a))$ (μ'はYの単子場) が成立つこと, 言いかえれば, $\alpha\in\hat{X}$, $\alpha\fallingdotseq a$なら$\hat{f}(\alpha)\fallingdotseq f(a)$となることが必要十分である.

証明　1°　fがaで連続とする. $f(a)=b$とすると, 任意の$B\in\mathscr{V}(b)$に対し, $\mathscr{V}(a)$の元Aで$f(A)\subset B$なるものが存在する. $\hat{f}(\mu(a))\subset\hat{f}(\hat{A})\subset\hat{B}$. よって$\hat{f}(\mu(a))\subset\mu'(b)$.

2°　条件がみたされるとし, $B\in\mathscr{V}(b)$とする. 点aの無限小近傍Γを取ると, $\hat{f}(\hat{\Gamma})\subset\hat{f}(\mu(a))\subset\mu'(b)\subset\hat{B}$. よって$\mathscr{L}$の文$\exists\mathsf{x}[\mathsf{x}\in\mathscr{V}(a)\wedge f(\mathsf{x})\subset B]$は$*$真, したがってモデル同値の原理によって真である. すなわちfはaで連続である. ただし, 《$f(\mathsf{x})\subset B$》は《$\forall\mathsf{y}[\mathsf{y}\in\mathsf{x}\rightarrow f\ \mathsf{ap}\ \mathsf{y}\in B]$》の略記である. ▮

4.2.6　系　Xの点列$\{a(n)\,;\,n\in N\}$がXの点bに収束するためには,

任意の $\nu\in\hat{N}-N$ に対して $^*a(\nu)\fallingdotseq b$ となることが必要十分である.

証明　理想元 $+\infty$ を N に付加えた集合 $\bar{N}=N\cup\{+\infty\}$ を考える. N の元はすべて孤立点とし, $+\infty$ の近傍の基本系として $A_k=\{n\in N\,;\,n>k\}\cup\{+\infty\}$ を取ると, $\bar{N}$ は位相空間になる. そして, $\mu(+\infty)=\bigcap\{\hat{A}_k\,;\,k\in N\}=\hat{N}-N$ である. しかも, $a(+\infty)=b$ として写像 $a:\bar{N}\to X$ を作ると, 点列 $a(n)$ が b に収束するのは, 写像 a が $+\infty$ で連続なときである. ここで前定理を使えばよい. ▮

4.2.7　復習　1)　集合族 $\{X_j:j\in J\}$ の直積を $X=\prod_{j\in J}X_j$ とする. ただし, X_j はすべてある集合 W ($W\in U$) に属するとする. J から $\bigcup W$ への写像 a で, $j\in J$ に対して $a_j=a(j)\in X_j$ なるもの (選択函数) の全体が X だった.

これを＊解釈すると, $^*J$ から $^*\bigcup{}^*W$ への＊写像 α で, $\nu\,^*\!\in{}^*J$ に対して $\alpha_\nu=\alpha(\nu)\in{}^*X_\nu$ なるものの＊全体が $^*X$ である：すなわち,

$$^*X={}^*\prod_{\nu\,^*\in\,^*J}{}^*X_\nu.$$

2)　$\{X_j\,;\,j\in J\}$ が位相空間の族のとき, $X=\prod_{j\in J}X_j$ の積位相 $\mathcal{T}$ とはつぎのものである. ただし, X_j の位相 (開集合の全体) を $\mathcal{T}_j$ とする. $A_j\in\mathcal{T}_j$, 有限個の j 以外については $A_j=X_j$ なる族 $\{A_j\,;\,j\in J\}$ を考え, $\prod_{j\in J}A_j$ の形の (X の) 部分集合全部の生成する位相が $\mathcal{T}$ である. または, X から X_j への標準射影 $a\mapsto a_j$ が連続になるような X の位相のうちもっとも粗いものが $\mathcal{T}$ である.

4.2.8　定理　$\{X_j\,;\,j\in J\}$ を位相空間の族, $X=\prod_{j\in J}X_j$ を直積位相空間とする. X_j, X の単子場をそれぞれ μ_j,μ とする. X の点 a, $\hat{X}$ の点 α に対し, $\alpha\in\mu(a)$ であるためには, あらゆる $j\in J$ に対して $\alpha_j\in\mu_j(a_j)$ が成立つことが必要十分である.

注意　J に属さない $\hat{J}$ の元について何も触れていない点が重要である.

証明　X_j, X の位相をそれぞれ $\mathcal{T}_j,\mathcal{T}$ とする.

1°　ある $k\in J$ に対して $\alpha_k\notin\mu_k(a_k)$ とする. $\mathcal{T}_k(a_k)$ の元 A_k で, $\alpha_k\notin\hat{A}_k$ なるものが存在する. k 以外の $j\in J$ に対して $A_j=X_j$ と置いて $A=\prod_{j\in J}A_j$

とすると，$A\in\mathscr{T}(a)$，$\alpha\notin\hat{A}$．よって $\alpha\notin\mu(a)$．

2° あらゆる $j\in J$ に対して $\alpha_j\in\mu_j(a_j)$ とする．$\mathscr{T}(a)$ の任意の元 A に対し，$\mathscr{T}(a)$ の元 B で，$B\subset A$，$B=\prod_{j\in J}B_j$ なるものが存在する．ただし，$B_j\in\mathscr{T}_j(a_j)$ であり，J のある有限部分集合 K をとると，$j\in J-K$ なら $B_j=X_j$．

条件により，$j\in K$ なら $\alpha_j\in\hat{B}_j$．K は有限だから $\hat{K}=K$．したがって，$\nu\in\hat{K}$ なら $\alpha_\nu\in\hat{B}_\nu$．一方，$J=K\cup(J-K)$，よって $\hat{J}=\hat{K}\cup\hat{}(J-K)$．$j\in J-K$ なら $B_j=X_j$．よって，$\nu\in\hat{}(J-K)$ なら $\hat{B}_\nu=\hat{X}_\nu$，したがって $\alpha_\nu\in\hat{B}_\nu$．結局，あらゆる $\nu\in\hat{J}$ に対して $\alpha_\nu\in\hat{B}_\nu$．したがって $\alpha\in\hat{B}$ となる．よって $\alpha\in\mu(a)$．▮

コンパクト性

4.2.9 定理 X がコンパクトであるためには，$\hat{X}$ の任意の点が X のある点の単子に属すること，言いかえれば，$\hat{X}$ の点がすべて近標準点であることが必要十分である．

注意 X はハウスドルフと仮定しない．

証明 1° X がコンパクトで，しかも遠標準点 $\alpha\in\hat{X}$ が存在したとする．任意の $a\in X$ に対し，$\mathscr{T}(a)$ の元 A で，$\alpha\notin\hat{A}$ なるものが存在する．その一つを選んで $A(a)$ とする（選択公理）．$\mathscr{R}=\{A(a)\,;\,a\in X\}$ は X の開被覆だから，有限個の点 $a_1,\cdots,a_n$ を選ぶと，$X=A(a_1)\cup\cdots\cup A(a_n)$ となる．よって，$\mathscr{L}$ の文 $\forall\mathsf{x}[\mathsf{x}\in X\rightarrow\mathsf{x}\in A(a_1)\vee\cdots\vee\mathsf{x}\in A(a_n)]$ は真，したがって＊真である．すなわち，任意の $\alpha\in\hat{X}$ はある $\hat{A}(a_i)$ に属することになり，$A(a_i)$ の取りかたに反する．

2° X がコンパクトでないとすると，X の開被覆 $\mathscr{R}$ で，その中から有限被覆を選ぶことのできないものが存在する．$\mathscr{L}$ の二変項論理式 $\phi(\mathsf{x},\mathsf{y})$ を《$\mathsf{x}\in\mathscr{R}\wedge\mathsf{y}\in X\wedge\mathsf{y}\notin\mathsf{x}$》とすると，$\phi$ は $\mathscr{R}$ 上 U で有限共起的である．共起性の原理により，ϕ は $\mathscr{R}$ 上 $^*U$ で共起する．すなわち，$\hat{X}$ の元 α で，いかなる $A\in\mathscr{R}$ に対しても $\alpha\notin\hat{A}$ なるものが存在する．ところが，任意の $a\in X$ はある $A\in\mathscr{R}$ に属する．$A\in\mathscr{T}(a)$，$\alpha\notin\hat{A}$ だから $\alpha\notin\mu(a)$，すなわち α は遠標準点である．▮

4.2.10 定理　X が局所コンパクトであるためには，$\hat{X}$ の任意の近標準点 α に対し，X のコンパクト部分集合 C で，$\alpha\in\hat{C}$ なるものが存在することが必要十分である．

証明　1°　X が局所コンパクトとする．α はある点 $a\in X$ の単子に属する．点 a のコンパクト近傍 C を取ると $\alpha\in\hat{C}$.

2°　条件がみたされるとする．X の点 a の単子に属する任意の α に対し，X のコンパクト部分集合 C_α で，$\alpha\in\hat{C}_\alpha$ なるものが存在する．

X のコンパクト部分集合の補集合の全体を $\mathscr{B}$ とする．X がコンパクトでなければ $\mathscr{B}$ はフィルター基底だから，$\tau=\bigcap\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{B}\}$ は空でない．しかし，$\mu(a)\cap\tau=\varnothing$ である．実際，$\alpha\in\mu(a)$ なら $\alpha\notin{}^\wedge(X-C_\alpha)$，よって $\alpha\notin\tau$.

点 a の無限小近傍 Γ を取る．また，$\mathscr{B}$ はフィルター基底だから，${}^*\mathscr{B}$ の＊元 Δ で，$\hat{\Delta}\subset\tau$ なるものが存在する（定理 3.1.13）．$\hat{\Gamma}\subset\mu(a)$ だから $\hat{\Gamma}\cap\hat{\Delta}=\varnothing$. よって $\mathscr{L}$ の文《$\exists x\exists y[x\in\mathscr{V}(a)\wedge y\in\mathscr{B}\wedge x\cap y=\varnothing]$》は＊真，したがってモデル同値の原理によって真である．すなわち，$\mathscr{V}(a)$ の元 A，$\mathscr{B}$ の元 B で，$A\cap B=\varnothing$ なるものが存在する．$A\subset X-B$ だから，$X-B$ は a のコンパクト近傍である．▮

§3　標準諸定理の超準的証明（例示）

4.3.1 定理　$\{X_j\,;\,j\in J\}$ を空でない位相空間の族，$X=\prod_{j\in J}X_j$ を直積位相空間とする．X がハウスドルフであるためには，各 X_j がハウスドルフであることが必要十分である．

証明　1°　各 X_j がハウスドルフとする．a, b を X の点とし，$\alpha\in\mu(a)\cap\mu(b)$ とする．定理 4.2.8 により，あらゆる j に対して $\alpha_j\in\mu_j(a_j)\cap\mu_j(b_j)$. したがって $a_j=b_j$. よって $a=b$.

2°　X がハウスドルフとする．J の元 k を固定し，a_k, b_k を X_k の相異なる二元とする．k 以外の j に対し，X_j の勝手な元 $a_j=b_j$ を取って，X の元 $a=(a_j)$，$b=(b_j)$ を決める（選択公理）．$a\neq b$ だから $\mu(a)\cap\mu(b)=\varnothing$.

$\alpha_k\in\mu_k(a_k)$ とする．写像 a を $J-\{k\}$ に制限したものを a' とし，$\alpha={}^*(k,\alpha_k)\,{}^*\!\cup{}^*a'$ とすると，α は ${}^*X$ の＊元で，$\alpha(k)=\alpha_k$ であり，$j\neq k$ なら

$\alpha(j)=a_j$ である．定理 4.2.8 によって $\alpha\in\mu(a)$，したがって $\alpha\notin\mu(b)$．$j\neq k$ なら $\alpha(j)\in\mu_j(b_j)$ だから，同じ定理によって $\alpha(k)\notin\mu_k(b_k)$，すなわち $\alpha_k\notin\mu_k(b_k)$．したがって $\mu_k(a)\cap\mu_k(b)=\emptyset$ となる．▮

4.3.2 定理　X をコンパクト空間，Y を位相空間とする．f が X から Y への連続写像なら，像 $f(X)$ はコンパクトである．

証明　f は X から $Z=f(X)$ への上射だから，$\hat{f}$ は $\hat{X}$ から $\hat{Z}$ への上射である．$\hat{Z}$ の点 β に対し，$\hat{X}$ の点 α で $\hat{f}(\alpha)=\beta$ なるものが存在する．X はコンパクトだから α は X のある点 a の単子に属する．f は連続だから $\beta=\hat{f}(\alpha)\in\mu(f(a))$．▮

4.3.3 定理（チホノフ）　$\{X_j\,;j\in J\}$ を空でない位相空間の族，$X=\prod_{j\in J} X_j$ を直積位相空間とする．X がコンパクトであるためには，各 X_j がコンパクトであることが必要十分である．

証明　1°　X がコンパクトとする．X から X_j への標準射影は連続だから，前定理によって X_j もコンパクトである．

2°　X_j がすべてコンパクトとする．$\hat{X}$ の点 $\alpha=(\alpha_\nu\,;\nu^*\in{}^*J)$ を取ると，あらゆる $j\in J$ に対して $\alpha_j\in\hat{X}_j$．仮定により，X_j の点 a_j で，$\alpha_j\in\mu_j(a_j)$ なるものが存在する．$a=(a_j)\in X$ とすれば，定理 4.2.8 によって $\alpha\in\mu(a)$．▮

§4　位　相　群

G が群なら ${}^*G$ は＊群であり，$\hat{G}$ は群である．前と同様，$G\subset\hat{G}$ とみなす．

位相群の単子

4.4.1 命題　G を位相群とし，その単子場を μ とする．$a,b\in G$ に対し，

1)　$\mu(a)\cdot b=\mu(ab)=a\cdot\mu(b)$,

2)　$\mu(ab)=\mu(a)\mu(b)$,　$\mu(a^{-1})=\mu(a)^{-1}$.

証明　1)　G から G への写像 $x\mapsto xb$ は連続だから，定理 4.2.5 によ

り，$\alpha\in\mu(a)$ なら $\alpha b\in\mu(ab)$．よって $\mu(a)b\subset\mu(ab)$．この式で a を ab，b を b^{-1} に置きかえれば，$\mu(ab)b^{-1}\subset\mu(a)$，すなわち，$\mu(ab)\subset\mu(a)\cdot b$．第二の等式も同様.

2）写像 $x\mapsto x^{-1}$ は連続だから，定理 **4.2.5** によって $\mu(a)^{-1}\subset\mu(a^{-1})$．逆元の全体を取って，$\mu(a)\subset\mu(a^{-1})^{-1}$．$a^{-1}$ を a と書けば $\mu(a^{-1})\subset\mu(a)^{-1}$．したがって $\mu(a^{-1})=\mu(a)^{-1}$．

つぎに，G の群算法 $(x,y)\mapsto xy$ も連続だから，定理 **4.2.5** によって $\mu(a)\mu(b)\subset\mu(ab)$．$\alpha$ を $\mu(ab)$ の元とする．$a^{-1}\in\mu(a^{-1})$ だから $a^{-1}\alpha\in\mu(a^{-1})\mu(ab)\subset\mu(b)$．$\alpha=a(a^{-1}\alpha)\in\mu(a)\mu(b)$，よって $\mu(ab)\subset\mu(a)\mu(b)$．▮

4.4.2　例　G を位相群，A,B を G の部分集合とする．A が閉集合，B がコンパクトなら AB は閉集合である．これを超準的に証明してみよう．

$C=AB$ とする．G の元 c が $\mu(c)\cap\hat{C}\neq\emptyset$ をみたせば $c\in C$ となることを言えばよい（系 **4.1.6** の 1）による）．$\mu(c)\cap\hat{C}$ の元 γ を取ると $\gamma=\alpha\beta$ $(\alpha\in\hat{A},\ \beta\in\hat{B})$ と書ける．B はコンパクトだから，$\beta\in\mu(b)$ なる $b\in B$ が存在する．$\alpha=\gamma\beta^{-1}\in\mu(c)\mu(b)^{-1}=\mu(cb^{-1})$．$a=cb^{-1}$ とする．$\alpha\in\hat{A}$ で A は閉だから a は A に属する．したがって $c=ab\in AB=C$．▮

4.4.3　定理　1）$\hat{G}$ の近標準点の全体 $N=\mathscr{N}(G)$ および単位元 e の単子 $M=\mu(e)$ はともに $\hat{G}$ の部分群であり，M は N の正規部分群である．M を G の**無限小群**と言う．

2）G の単子はちょうど N の M による剰余類と一致する．したがって $N=GM$ であり，$a,b\in G$，$\mu(a)\neq\mu(b)$ なら $\mu(a)\cap\mu(b)=\emptyset$ である．

3）G がハウスドルフであるためには $M\cap G=\{e\}$ が必要十分である．このとき，G と商群 N/M とは（抽象群として）同型である．

証明　1）$MM=\mu(e)\mu(e)=\mu(e)=M$，$M^{-1}=\mu(e)^{-1}=\mu(e)=M$．すなわち M は群である．$\alpha,\beta\in N$ なら，G のある点 a,b に対して $\alpha\in\mu(a)$，$\beta\in\mu(b)$．$\alpha\beta^{-1}\in\mu(a)\mu(b)^{-1}=\mu(ab^{-1})\subset N$．すなわち N は群である．

つぎに，$\alpha\in M$，$\beta\in N$ なら　G のある元 b に対して $\beta\in\mu(b)$．$\beta\alpha\beta^{-1}\in\mu(b)\mu(e)\mu(b)^{-1}=\mu(e)=M$．すなわち M は N の正規部分群である．

2）任意の単子 $\mu(a)$ は $\mu(ae)=aM$，すなわちある剰余類と一致する．

逆に N の元 α に対し，G のある元 a を取ると $\alpha\in\mu(a)$ となるから $\alpha M\subset\mu(a)$．$\beta\in\mu(a)$ なら $\alpha^{-1}\beta\in\mu(e)$，したがって $\beta\in\alpha M$．よって $\alpha M=\mu(a)$．

3）G がハウスドルフなら当然 $M\cap G=\{e\}$ である．逆に $M\cap G=\{e\}$ とし，a, b を G の相異なる元とする．$ab^{-1}\neq e$ だから $ab^{-1}\notin M$．よって $\mu(ab^{-1})\neq\mu(e)$，したがって $\mu(a)\neq\mu(b)$．これらは剰余類だから $\mu(a)\cap\mu(b)=\emptyset$．∎

単子群による位相の導入

4.4.4　定理　G を抽象群，M を $\hat{G}$ の部分群とする．G 上に位相 $\mathscr{T}$ が存在して，G が位相群となり，かつ M がその無限小群になるためには，つぎの二条件がみたされることが必要十分である：

a）$\mathscr{F}=\{A\subset G\,;\,M\subset\hat{A}\}$ とすると，$M=\bigcap\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{F}\}$．あとで定義する言葉を使えば，$M$ は一般の単子である．

b）任意の $a\in G$ に対し，$aMa^{-1}=M$．

証明　1°　このような位相が存在すれば，二条件がみたされることは前定理から明らかである．

2°　逆を証明するために，つぎの基本的事実を使う．$\mathscr{P}(G)$ の部分集合 $\mathscr{V}$ がつぎの条件をみたすとする：

(イ)　$\mathscr{V}$ は G 上のフィルターであり，$A\in\mathscr{V}$ なら $e\in A$．

(ロ)　任意の $A\in\mathscr{V}$ に対し，$\mathscr{V}$ の元 B で $BB^{-1}\subset A$ なるものが存在する．

(ハ)　$A\in\mathscr{V}$，$a\in G$ なら $aAa^{-1}\in\mathscr{V}$．

このとき，G 上に位相 $\mathscr{T}$ が存在して G は位相群になり，$\mathscr{V}$ は単位元の近傍系になる．このような位相は一つしかない．

こういう《標準的》結果を使いたくなければ，§5 の《超準的》結果を使えばよい．

3°　$\mathscr{F}$ が条件(イ), (ロ), (ハ)をみたすことを示す．(イ) は定義から明らかである．

(ロ)　$\mathscr{F}$ はフィルターだから，定理 **3.1.13** の 2) により，${}^*\mathscr{F}$ の $*$ 元 Γ で $\hat{\Gamma}\subset M$ なるものが存在する．　$\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}^{-1}\subset MM^{-1}=M\subset\hat{A}$．　よって $\mathscr{L}$ の文《$\exists x[x\in\mathscr{F}\wedge xx^{-1}\subset A]$》は $*$ 真，したがってモデル同値の原理によって真である．すなわち，$\mathscr{F}$ の元 B で $BB^{-1}\subset A$ なるものが存在する．略記《$xx^{-1}\subset A$》の意味は明らかだろう．

(ハ)　$\hat{}(aAa^{-1})=a\hat{A}a^{-1}\supset aMa^{-1}=M$. よって $aAa^{-1}\in\mathscr{F}$. ▮

ハール測度の構成

4.4.5　復習　G をハウスドルフ局所コンパクト群とし，G 上の連続函数（実数値，以下同様）で台がコンパクトなものの全体を $\mathscr{C}_0$ とする．$\mathscr{C}_0$ の元 f,g が任意の $x\in G$ に対して $f(x)\leqslant g(x)$ をみたすとき，$f\leqslant g$ と書く．$\mathscr{C}_0$ の元 f および G の元 s に対し，$f^s(x)=f(sx)$ によって函数 $f^s\in\mathscr{C}_0$ を定める．$\mathscr{C}_0^+=\{f\in\mathscr{C}_0\,;\,f\geqslant 0\}$ と置く．

G 上のハール測度とは，$\mathscr{C}_0$ から $\boldsymbol{R}$ への 0 でない線型写像 I で，$f\geqslant 0$ なら $I(f)\geqslant 0$，かつ任意の $f\in\mathscr{C}_0$ および任意の $s\in G$ に対して $I(f^s)=I(f)$ となるものである．

この存在を言うためには，$\mathscr{C}_0^+$ から $\boldsymbol{R}^+=\{a\in\boldsymbol{R}\,;\,a\geqslant 0\}$ への 0 でない写像 I^+ で，つぎの三条件をみたすものが存在することを言えばよい：

a)　$c\in\boldsymbol{R}^+$, $f\in\mathscr{C}_0^+$ なら $I^+(cf)=cI^+(f)$.

b)　$f,g\in\mathscr{C}_0^+$ なら $I^+(f+g)=I^+(f)+I^+(g)$.

c)　$f\in\mathscr{C}_0^+$, $s\in G$ なら $I^+(f^s)=I^+(f)$.

注意　I^+ の連続性は正値性から自然に出る．

4.4.6　I^+ の構成　1)　$f,g\in\mathscr{C}_0^+$, $g\neq 0$ に対し，自然数 $l>0$, $\boldsymbol{N}$ の区間 $[1,l]$ から G への写像 $s:n\mapsto s_n$,　$[1,l]$ から $\boldsymbol{R}^+$ への写像 $a:n\mapsto a_n$ で $f\leqslant\sum_{n=1}^{l}a_n g^{s_n}$ となるものが存在する．

証明　開集合 B および実数 $d>0$ を適当に取ると，$x\in B$ なら $g(x)\geqslant d$ となる．$\{xB\,;\,x\in G\}$ は f の台 K の開被覆だから，有限個の $s_1,\cdots,s_l$ によって $K\subset s_1^{-1}B\cup\cdots\cup s_l^{-1}B$ となる．$a_n=\dfrac{1}{d}\sup\{f(x)\,;\,x\in s_n^{-1}B\}$ と置く．K の任意の元 x は $x=s_m^{-1}y$, $y\in B$ と書ける．$\sum_{n=1}^{l}a_n g^{s_n}(x)\geqslant a_m g^{s_m}(x)=a_m g(y)\geqslant a_m d\geqslant f(x)$ となる．▮

2)　G の元 a の任意の近傍 A に対し，$\mathscr{C}_0^+$ の元 f で，その台が A に含まれ，しかも $f(a)>0$ なるものが存在する（ウリソンの定理）．したがって，単位元 e の無限小近傍 $\varGamma$（一つ固定する）に対し，${}^*\mathscr{C}_0^+$ の＊元 φ で，その台

が Γ に含まれ，しかも $\varphi(e)>0$ なるものが存在する．1) の結果を＊解釈すると，任意の $f\in\mathscr{C}_0^+$ に対し，超自然数 $\lambda>0$, $^*[1,\lambda]$ から $^*G$ への＊写像 $\sigma:\nu\mapsto\sigma_\nu$ および $^*[1,\lambda]$ から $^*\boldsymbol{R}^+$ への＊写像 $\alpha:\nu\mapsto\alpha_\nu$ が存在し，$^*f\leqslant{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}\alpha_\nu\varphi^{\sigma_\nu}$ となる．このような組 (λ,σ,α) の全体は内集合だからそれを Ω とし，

$$\Phi(f)={}^*\mathrm{inf}^*\left\{{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}\alpha_\nu\,;\,(\lambda,\sigma,\alpha)\,{}^*\!\in\Omega\right\}$$

と置く．

3) $\mathscr{C}_0^+$ の 0 でない元 f_0 を固定すると，任意の $f\in\mathscr{C}_0^+$ に対して $\dfrac{\Phi(f)}{\Phi(f_0)}$ は有限超実数である．

証明　$f\leqslant\sum_{n=1}^{l}a_nf_0^{s_n}$ となる (l,a,s) を取る．$f_0\leqslant{}^*\sum_{\nu=1}^{\kappa}\beta_\nu\varphi^{\tau_\nu}$ なる任意の組 (κ,τ,β) に対し，$f\leqslant\sum_{n=1}^{l}a_n{}^*\sum_{\nu=1}^{\kappa}\beta_\nu\varphi^{\tau_\nu s_n}$ だから，

$$\Phi(f)\leqslant\sum_{n=1}^{l}{}^*\sum_{\nu=1}^{\kappa}a_n\beta_\nu\leqslant l\cdot\max\{a_1,\cdots,a_l\}\cdot{}^*\sum_{\nu=1}^{\kappa}\beta_\nu.$$

したがって $\dfrac{\Phi(f)}{\Phi(f_0)}$ は有限超実数である．▮

4) $f\in\mathscr{C}_0^+$ に対し，$I^+(f)=\mathrm{st}\left[\dfrac{\Phi(f)}{\Phi(f_0)}\right]$（標準部分）と置く．

4.4.7　定理　$I^+:\mathscr{C}_0^+\to\boldsymbol{R}^+$ は **4.4.5** の条件 a), b), c) をみたす．すなわち，ハール測度が存在する．

証明　a) および c) は定義から明らかだから b) を示す．$f_1,f_2\in\mathscr{C}_0^+$ に対し，不等式 $I^+(f_1+f_2)\leqslant I^+(f_1)+I^+(f_2)$ が成立つことはすぐ分るから，逆向きの不等式が成立つことを言えばよい．

f_1+f_2 の台を K とする．ハウスドルフ・コンパクト空間の正規性により，K 上で 1 であるような $\mathscr{C}_0^+$ の元 p が存在する（ウリソンの定理）．実数 $e>0$ に対し，$g=f_1+f_2+ep$ とすると，$x\in K$ に対しては $g(x)\geqslant e$．$g_j=\dfrac{f_j}{g}$ $(j=1,2.$ 以下同様）と置くと，$g_j\in\mathscr{C}_0^+$, $g_1+g_2\leqslant1$.

g_j は連続であり，Γ は無限小近傍だから，$\xi,\tau\in\hat{G}$ でしかも $\tau^{-1}\xi\in\hat{\Gamma}$ なら $|g_j(\xi)-g_j(\tau)|<e$ が成立つ．$g\leqslant\sum_{\nu=1}^{\lambda}\gamma_\nu\varphi^{\tau_\nu}$ とする．

$\hat{G}$ の元 ξ に対し，$F(\xi)=\{\nu\in\hat{\boldsymbol{N}}\,;\,\nu\leqslant\lambda,\ \tau_\nu\xi\in\hat{\Gamma}\}$ は内集合でしかも＊有限

である．φ の台は $\hat{\Gamma}$ に含まれるから，$g(\xi)\leqslant {}^*\sum_{\nu\in F(\xi)}\gamma_\nu\varphi(\tau_\nu\xi)$．$\nu\in F(\xi)$ なら $\xi\in\tau_\nu^{-1}\hat{\Gamma}$ だから，$g_j(\xi)\leqslant g_j(\tau_\nu^{-1})+e$.

$$f_j(\xi)=g_j(\xi)g(\xi)\leqslant {}^*\sum_{\nu\in F(\xi)}\gamma_\nu g_j(\xi)\varphi(\tau_\nu\xi)\leqslant {}^*\sum_{\nu\in F(\xi)}\gamma_\nu[g_j(\tau_\nu^{-1})+e]\varphi(\tau_\nu\xi)$$
$$\leqslant {}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}\gamma_\nu[g_j(\tau_\nu^{-1})+e]\varphi^{\tau_\nu}(\xi).$$

したがって $\Phi(f_j)\leqslant {}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}\gamma_\nu[g_j(\tau_\nu^{-1})+e]$．$j=1,2$ に関して加えると，

$$\Phi(f_1)+\Phi(f_2)\leqslant {}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}\gamma_\nu[g_1(\tau_\nu^{-1})+g_2(\tau_\nu^{-1})+2e]\leqslant(1+2e)\,{}^*\sum_{\nu=1}^{\lambda}\gamma_\nu.$$

γ_ν, τ_ν は任意だったから，

$$\Phi(f_1)+\Phi(f_2)\leqslant(1+2e)\Phi(g)=(1+2e)\Phi(f_1+f_2+ep)$$
$$\leqslant(1+2e)[\Phi(f_1+f_2)+e\Phi(p)].$$
$$\frac{\Phi(f_1)}{\Phi(f_0)}+\frac{\Phi(f_2)}{\Phi(f_0)}\leqslant(1+2e)\left[\frac{\Phi(f_1+f_2)}{\Phi(f_0)}+e\frac{\Phi(p)}{\Phi(f_0)}\right].$$

e は任意だったから，$I^+(f_1)+I^+(f_2)\leqslant I^+(f_1+f_2)$ となる．▮

§5　単子場と位相

フィルターと単子との対応

4.5.1　定義　X を集合 $(X\in U)$，$\mathscr{S}$ を $\mathscr{P}(X)$ の有限交差的部分集合とする．$\bigcap\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{S}\}$ を $\mathscr{S}$ の**単子**と言い，Mon $\mathscr{S}$ と書く．定理 **3.1.12** により，Mon $\mathscr{S}$ は $\hat{X}$ の空でない部分集合である．$\hat{X}$ の部分集合 M に対し，$\mathscr{P}(X)$ のある有限交差的部分集合 $\mathscr{S}$ があって $M=\text{Mon}\,\mathscr{S}$ となるとき，M を（一般の）単子と言う．逆に，$\hat{X}$ の空でない部分集合 P に対し，$\{A\subset X\,;\,P\subset\hat{A}\}$ は X 上のフィルターである．これを P の**フィルター**と言い，Fil P と書く．

4.5.2　命題　1）$\mathscr{S},\mathscr{T}$ が $\mathscr{P}(X)$ の有限交差的部分集合で $\mathscr{S}\subset\mathscr{T}$ なら Mon $\mathscr{S}\supset$Mon $\mathscr{T}$.

2）P,Q が $\hat{X}$ の空でない部分集合で $P\subset Q$ なら Fil $P\supset$Fil Q.

3）$\hat{X}$ の空でない部分集合 P に対し，$P\subset\text{Mon(Fil}\,P)$．等号が成立つの

は P が単子のときである．

4) $\mathscr{P}(X)$ の有限交差的部分集合 $\mathscr{S}$ に対し，$\mathscr{S}\subset\mathrm{Fil}(\mathrm{Mon}\,\mathscr{S})$．等号が成立つのは $\mathscr{S}$ がフィルターのときである．

5) したがって，X 上のフィルターの全体 $\boldsymbol{F}$ と一般単子の全体 $\boldsymbol{M}$ との間に，自然な一対一対応がある．

証明　1), 2) は明らか．

3) $A\in\mathrm{Fil}\,P$ なら $P\subset\hat{A}$．よって $P\subset\mathrm{Mon}(\mathrm{Fil}\,P)$．等号が成立てば明らかに P は単子である．逆に $\mathscr{P}(X)$ の有限交差的部分集合 $\mathscr{S}$ があって $P=\mathrm{Mon}\,\mathscr{S}$ だとする．$A\in\mathscr{S}$ なら $P\subset\hat{A}$，したがって $A\in\mathrm{Fil}\,P$．すなわち $\mathscr{S}\subset\mathrm{Fil}\,P$．1) によって $\mathrm{Mon}\,\mathscr{S}\supset\mathrm{Mon}(\mathrm{Fil}\,P)$．

4) $A\in\mathscr{S}$ なら $\mathrm{Mon}\,\mathscr{S}\subset\hat{A}$，したがって $A\in\mathrm{Fil}(\mathrm{Mon}\,\mathscr{S})$．すなわち $\mathscr{S}\subset\mathrm{Fil}(\mathrm{Mon}\,\mathscr{S})$．等号が成立てば明らかに $\mathscr{S}$ はフィルターである．逆に $\mathscr{S}$ がフィルターだとし，$A\in\mathrm{Fil}(\mathrm{Mon}\,\mathscr{S})$ とする．当然 $\mathrm{Mon}\,\mathscr{S}\subset\hat{A}$．$\mathscr{S}$ はフィルターだから，定理 **3.1.13** により，${}^*\mathscr{S}$ の $*$元 Γ で，$\hat{\Gamma}\subset\mathrm{Mon}\,\mathscr{S}$ となるものが存在する．よって $\mathscr{L}$ の文《$\exists \mathrm{x}[\mathrm{x}\in\mathscr{S}\wedge\mathrm{x}\subset A]$》は$*$真，したがってモデル同値の原理によって真である．すなわち，$\mathscr{S}$ の元 B で，$B\subset A$ なるものが存在する．$\mathscr{S}$ はフィルターだから $A\in\mathscr{S}$．

5) 上の諸結果から明らかである．∎

＊フィルターの標準部分

4.5.3 命題　X 上のフィルターの全体を $\boldsymbol{F}$ とする．$\hat{\boldsymbol{F}}$ は ${}^*X$ 上の$*$フィルターの全体である．すなわち，$\hat{\boldsymbol{F}}$ の元 Φ はつぎの性質をもつ：

*a) $\Phi\neq{}^*\varnothing$．${}^*\varnothing\ {}^*\notin\Phi$．

*b) $\Gamma, \Delta\ {}^*\subset {}^*X$，$\Gamma\ {}^*\in\Phi$，$\Gamma\ {}^*\subset\Delta \Rightarrow \Delta\ {}^*\in\Phi$．

*c) $\Gamma, \Delta\ {}^*\in\Phi \Rightarrow \Gamma\ {}^*\cap\Delta\ {}^*\in\Phi$．

$\mathscr{B}=\{\hat{\Gamma}\,;\,\Gamma\ {}^*\in\Phi\}$ は $\hat{X}$ 上のフィルター基底であるが，X が無限集合ならこれはフィルターではない（外集合が除外される）．

$*$フィルター Φ が$*$超フィルターであるためには，${}^*X$ の任意の$*$部分集合 Γ に対し，$\Gamma\ {}^*\in\Phi$ または ${}^*X\ {}^*\!-\Gamma\ {}^*\in\Phi$ となることが必要十分である．

4.5.4　補題　＊フィルター Φ に対し，$\Phi_0=\{A\subset X\,;\,{}^*A^*\in\Phi\}$ と置く．Φ_0 は X 上のフィルターである．とくに Φ が＊超フィルターなら Φ_0 は超フィルターである．

証明　フィルターの三条件を調べる．$X\in\Phi_0$，よって $\Phi_0\neq\emptyset$．${}^*\emptyset^*\notin\Phi$ だから $\emptyset\notin\Phi_0$．$A\in\Phi_0$，$A\subset B$ なら，${}^*A^*\in\Phi$，${}^*A^*\subset{}^*B$．よって $B\in\Phi_0$．$A, B\in\Phi_0$ なら ${}^*A, {}^*B^*\in\Phi$．よって ${}^*A^*\cap{}^*B^*\in\Phi$．すなわち $A\cap B\in\Phi_0$．

つぎに Φ が＊超フィルターであれば，$A\subset X$ に対して，${}^*A^*\in\Phi$ または ${}^*X^*-{}^*A^*\in\Phi$．したがって $A\in\Phi_0$ または $X-A\in\Phi_0$．∎

位相空間の単子場の延長

4.5.5　定義　X を位相空間，μ をその単子場とする．$\hat{X}$ の元 α に対し，

$$\tilde{\mu}(\alpha)=\bigcap\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{T},\ \alpha\in\hat{A}\}$$

と置く．$\tilde{\mu}(\alpha)$ は一般単子である．とくに $\alpha\in X$ なら，$\tilde{\mu}(\alpha)=\mu(\alpha)$ である．$\tilde{\mu}$ を $\hat{X}$ から一般単子の全体 $\boldsymbol{M}$ への写像と考え，位相空間 X の**延長された単子場**と言う．

4.5.6　命題　X の部分集合 A が開集合であるためには，$\hat{A}$ の任意の元 α に対して $\tilde{\mu}(\alpha)\subset\hat{A}$ が成立つことが必要十分である．

証明　A が開集合で $\alpha\in\hat{A}$ なら，定義によって $\tilde{\mu}(\alpha)\subset\hat{A}$．逆に条件がみたされれば，とくに A の元 a に対して $\mu(a)\subset\hat{A}$．定理 **4.1.4** の 1) によって A は開集合である．∎

4.5.7　補題　X を集合 $(X\in U)$ とし，$\mathscr{S}$ を $\mathscr{P}(X)$ の部分集合，Y を X の部分集合とする．もし $\hat{Y}\subset\bigcup\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{S}\}$ ならば，$\mathscr{S}$ の有限個の元 $A_1, \cdots, A_n$ によって $\hat{Y}\subset\hat{A}_1\cup\cdots\cup\hat{A}_n$ となる．

証明　$\mathscr{S}'=\{Y-A\,;\,A\in\mathscr{S}\}$ と置く．仮定により，$\bigcap\{\hat{B}\,;\,B\in\mathscr{S}'\}=\emptyset$．結論を否定すると，$\mathscr{S}$ の任意有限個の元 $A_1, \cdots, A_n$ に対して $\hat{Y}\not\subset\hat{A}_1\cup\cdots\cup\hat{A}_n$．すなわち，$\mathscr{S}'$ の任意の有限個の元 $B_1, \cdots, B_n$ に対して $\hat{B}_1\cap\cdots\cap\hat{B}_n\neq\emptyset$，したがって $B_1\cap\cdots\cap B_n\neq\emptyset$．よって $\mathscr{S}'$ は有限交差的である．定理 **3.1.12** により，$\bigcap\{\hat{B}\,;\,B\in\mathscr{S}'\}\neq\emptyset$ となり，矛盾する．∎

4.5.8 命題 位相空間 X の部分集合 A に対し，$\mu(A)=\bigcup\{\tilde{\mu}(\alpha);\alpha\in\hat{A}\}$．ただし，$\mu(A)$ は A の単子である（命題 **4.2.3** を見よ）．

証明 1° 右辺の元 β を取る．$\hat{A}$ のある元 α に対して $\beta\in\tilde{\mu}(\alpha)$ となる．A を含む任意の開集合 B に対して，$\alpha\in\hat{B}$．命題 **4.5.6** によって $\tilde{\mu}(\alpha)\subset\hat{B}$．よって $\beta\in\hat{B}$．したがって $\beta\in\mu(A)$．

2° $\hat{X}$ の元 β が右辺に属さなければ，$\hat{A}$ のどの元 α に対しても $\beta\notin\tilde{\mu}(\alpha)$．よって開集合 B で，$\alpha\in\hat{B}$, $\beta\notin\hat{B}$ なるものが存在する．その一つを選んで $B(\alpha)$ とする（選択公理）．$\mathscr{S}=\{B(\alpha);\alpha\in\hat{A}\}$ は $\mathscr{P}(X)$ の部分集合で，$\hat{A}\subset\bigcup\{\hat{B}(\alpha);B(\alpha)\in\mathscr{S}\}$．前補題により，$\hat{A}$ の有限個の元 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ によって $\hat{A}\subset\hat{B}(\alpha_1)\cup\cdots\cup\hat{B}(\alpha_n)$ となる．$B=B(\alpha_1)\cup\cdots\cup B(\alpha_n)$ と置くと，B は開集合で $\hat{A}\subset\hat{B}$, すなわち $A\subset B$, しかも β は $\hat{B}$ に属さない．したがって β は $\mu(A)$ に属さない．▮

注意 $\mathscr{S}$ の添字域 $\hat{A}$ の濃度は普通非常に大きい．たとえば ${}^*\mathscr{U}$ が U 上の正則超フィルターを法とする超冪モデルなら $|\hat{A}|=|A|^{|U|}$（定理 **3.2.11** による）であるし，もし ${}^*\mathscr{U}$ が $|U|$ 級飽和モデルなら $|\hat{A}|>|U|$ である（定理 **3.1.14**）．しかし，$|\mathscr{S}|<|U|$ だから，$\mathscr{S}$ の表示 $\{B(\alpha);\alpha\in\hat{A}\}$ には重複が非常に多いわけである．

4.5.9 定義 X を位相空間，μ をその単子場とする．X の点 a にその近傍系 $\mathscr{V}(a)$ を対応させる写像 $\mathscr{V}:X\to\boldsymbol{F}$ に対し，＊写像 ${}^*\mathscr{V}:{}^*X\ {}^*\!\!\to{}^*\boldsymbol{F}$ が定まる．$\hat{X}$ の点 α に対し，${}^*\mathscr{V}(\alpha)$ は＊フィルターである．$\mathscr{V}_0(\alpha)=({}^*\mathscr{V}(\alpha))_0=\{A\subset X;{}^*A\ {}^*\!\!\in{}^*\mathscr{V}(\alpha)\}$ と置くと，補題 **4.5.4** により，$\mathscr{V}_0(\alpha)$ はフィルターである．$\mathscr{L}$ の文《$\forall x\forall y[x\in X\wedge y\in\mathscr{V}(x)\to x\in y]$》は真，したがって＊真である．だから，$\alpha\in\hat{X}$, $\Gamma\ {}^*\!\!\in{}^*\mathscr{V}(\alpha)$ なら $\alpha\ {}^*\!\!\in\Gamma$．とくに $A\in\mathscr{V}_0(\alpha)$ なら $\alpha\in\hat{A}$．

同様に，X の点 a にその開近傍系 $\mathscr{T}(a)$ を対応させる写像に対し，＊写像 ${}^*\mathscr{T}$ が定まる，$\hat{X}$ の点 α に対し，${}^*\mathscr{T}(\alpha)$ は＊フィルター基底である．$\mathscr{T}_0(\alpha)=\{A\subset X;{}^*A\ {}^*\!\!\in{}^*\mathscr{T}(\alpha)\}$ と置く．$\mathscr{T}_0(\alpha)$ は有限交差的である．前と同様，$A\in\mathscr{T}_0(\alpha)$ なら $\alpha\in\hat{A}$．

4.5.10 命題 1) $\mathscr{T}_0(\alpha)=\{A\in\mathscr{T};\alpha\in\hat{A}\}$．したがって $\mathscr{T}_0(\alpha)$ はフ

ィルター基底であり，$\tilde{\mu}(\alpha)=\mathrm{Mon}\,\mathscr{T}_0(\alpha)$.

2)　X の部分集合 A が $\mathscr{V}_0(\alpha)$ に属するためには，$\mathscr{T}_0(\alpha)$ の元 B で $B\subset A$ なるものが存在することが必要十分である．したがって $\tilde{\mu}(\alpha)=\mathrm{Mon}\,\mathscr{V}_0(\alpha)$.

証明　1)　$A\in\mathscr{T}_0(\alpha) \Longleftrightarrow {}^*A\,{}^*\!\in {}^*\mathscr{T}(\alpha) \Longleftrightarrow {}^*A\,{}^*\!\in {}^*\mathscr{T},\ \alpha\,{}^*\!\in {}^*A \Longleftrightarrow A\in\mathscr{T},\ \alpha\in\hat{A}$. 後半は $\tilde{\mu}(\alpha)$ の定義を見ればよい．

2)　A が条件をみたせば，$B\in\mathscr{T}_0(\alpha)\subset\mathscr{V}_0(\alpha)$. $\mathscr{V}_0(\alpha)$ はフィルターだから $A\in\mathscr{V}_0(\alpha)$. 逆を言うために $A\in\mathscr{V}_0(\alpha)$ とし，A の内部（A に含まれる最大の開集合）を B とする．$\alpha\in\hat{B}$ を言えばよい．

$\alpha\notin\hat{B}$ と仮定する．A の境界点の近傍は A に含まれない．よって $\mathscr{L}$ の文《$\forall \mathsf{x}[\mathsf{x}\in A-B\rightarrow\forall \mathsf{y}[\mathsf{y}\in\mathscr{V}(\mathsf{x})\rightarrow \mathsf{y}\not\subset A]]$》は真，したがって＊真である．$\alpha\in\hat{A}-\hat{B}$ だから，$\Gamma\,{}^*\!\in {}^*\mathscr{V}(\alpha)$ なら $\Gamma\,{}^*\!\not\subset {}^*A$.　とくに ${}^*A\,{}^*\!\in {}^*\mathscr{V}(\alpha)$ だから ${}^*A\,{}^*\!\not\subset {}^*A$ となって矛盾する．▮

推移的な単子場と位相との対応

4.5.11　命題　位相空間 X の延長された単子場を $\tilde{\mu}:\hat{X}\longrightarrow \boldsymbol{M}$ とすれば，当然，$\alpha\in\hat{X}$ に対して $\alpha\in\tilde{\mu}(\alpha)$ であるが，さらにつぎのことが成立つ：

(T)　$a\in X,\ \alpha\in\hat{X},\ \alpha\in\mu(a)$ なら $\tilde{\mu}(\alpha)\subset\mu(a)$.

証明　$\mathscr{T}(a)$ の任意の元 A に対して $\tilde{\mu}(\alpha)\subset\hat{A}$ ならよい．$\mu(a)\subset\hat{A}$ だから仮定によって $\alpha\in\hat{A}$. したがって $A\in\mathscr{T}_0(\alpha)$. よって $\tilde{\mu}(\alpha)\subset\hat{A}$. ▮

4.5.12　定義　X を集合，λ を X から $\hat{X}$ の一般単子の全体 $\boldsymbol{M}$ への写像とし，$a\in X$ なら $a\in\lambda(a)$ なるものとする．

1)　X の点 a に対し，$\mathscr{U}(a)=\mathrm{Fil}\,\lambda(a)=\{A\subset X\,;\,\lambda(a)\subset\hat{A}\}$ と置くと $\mathscr{U}$ は X から X 上のフィルターの全体 $\boldsymbol{F}$ への写像である（もちろん $\lambda(a)=\mathrm{Mon}\,\mathscr{U}(a)$). ${}^*\mathscr{U}$ は ${}^*X$ から ${}^*\boldsymbol{F}$ への＊写像で，$\alpha\,{}^*\!\in {}^*X$ に対して ${}^*\mathscr{U}(\alpha)$は＊フィルターである．

$\mathscr{U}_0(\alpha)=({}^*\mathscr{U}(\alpha))_0=\{A\subset X\,;\,{}^*A\,{}^*\!\in {}^*\mathscr{U}(\alpha)\}$ と置く．補題**4.5.4** によって $\mathscr{U}_0(\alpha)$ はフィルターである．$\hat{X}$ の元 α に対し，

$$\tilde{\lambda}(\alpha)=\mathrm{Mon}\,\mathscr{U}_0(\alpha)=\bigcap\{\hat{A}\,;\,A\in\mathscr{U}_0(\alpha)\}$$

と置く．とくに $a\in X$ なら $\tilde{\lambda}(a)=\lambda(a)$. $\mathscr{U}_0(\alpha)=\mathrm{Fil}\,\tilde{\lambda}(\alpha)$.

2)　こうして作られた$\tilde{\lambda}$が条件

(T)　$a\in X,\ \alpha\in\hat{X},\ \alpha\in\lambda(a)$ なら $\tilde{\lambda}(\alpha)\subset\lambda(a)$

をみたすとき，λをX上の**推移的単子場**と言う．

4.5.13　定理　Xを集合，λをX上の推移的単子場とする．すなわち，λはXから$\boldsymbol{M}$への写像で《$a\in X\Rightarrow a\in\lambda(a)$》をみたし，$\lambda$を上記のように延長した写像 $\tilde{\lambda}:\hat{X}\to\boldsymbol{M}$ は条件 (T) をみたすとする．このとき，Xの各点aに対して $\mathscr{U}(a)=\mathrm{Fil}\,\lambda(a)$ を点aの近傍系とするXの位相$\mathscr{T}$が唯一つ存在する．しかもλはその位相の単子場に一致する．したがって，集合Xに対し，X上の推移的単子場とX上の位相とは一対一に対応する．

証明　1°　復習　Xから$\boldsymbol{F}$(X上のフィルターの全体)への写像$\mathscr{U}$がつぎの二条件をみたすとする：

a)　$a\in X,\ A\in\mathscr{U}(a)$ なら $a\in A$.

b)　$\mathscr{U}(a)$ の元Aに対し，$\mathscr{U}(a)$ の元Bで《$b\in B\Rightarrow A\in\mathscr{U}(b)$》をみたすものが存在する．

このとき，Xの部分集合Aで《$a\in A\Rightarrow A\in\mathscr{U}(a)$》をみたすものの全体を$\mathscr{T}$とすると，$\mathscr{T}$は$X$上の位相で，$\mathscr{U}(a)$は点$a$の近傍系になる．しかも，$\mathscr{U}(a)$が点$a$の近傍系になる位相はこれだけしかない．これはどんな位相の本にも出ている．

2°　λから作った $\mathscr{U}:X\to\boldsymbol{F},\ \mathscr{U}(a)=\mathrm{Fil}\,\lambda(a)$ が上の二条件をみたすことを言う．a) はλに関する条件としてすでに含まれている．b) を示す．

$\mathscr{U}(a)$ の元Aに対し，$B=\{x\in A\,;\,A\in\mathscr{U}(x)\}$ と置く．$B\in\mathscr{U}(a)$ を示せばよい．そのためには $\lambda(a)\subset\hat{B}$ を言えばよい．Aの元xに対して《$x\in B\Leftrightarrow A\in\mathscr{U}(x)$》だから，これをモデル同値の原理によって＊解釈すると，$\xi\,{}^*{\in}\,{}^*A$ に対して《$\xi\,{}^*{\in}\,{}^*B\Leftrightarrow{}^*A\,{}^*{\in}\,{}^*\mathscr{U}(\xi)$》となる．

$\alpha\in\lambda(a)$ とすると，推移性の条件 (T) によって $\tilde{\lambda}(\alpha)\subset\lambda(a)\subset\hat{A}$. $\mathscr{U}_0(\alpha)$ はフィルターだから$A\in\mathscr{U}_0(\alpha)$，よって ${}^*A\,{}^*{\in}\,{}^*\mathscr{U}(\alpha)$. したがって $\alpha\,{}^*{\in}\,{}^*B$ となる．すなわち，$\lambda(a)\subset\hat{B}$. ∎

注意　この結果により，命題**4.5.11**の証明は論理的には要らないことになる．

応用：正則性と正規性

4.5.14　定理　ハウスドルフ空間 X が正則であるためには，

$$a\in X,\ \beta\in\hat{X},\ \beta\notin\mu(a)\Rightarrow\mu(a)\cap\tilde{\mu}(\beta)=\emptyset$$

が成立つことが必要十分である．

証明　X の点 a の閉近傍の全体を $\mathscr{C}(a)$ とする．X が正則であるためには，$\mathscr{C}(a)$ の生成するフィルターが $\mathscr{V}(a)$ に一致すること，すなわち $\mu(a)=\mathrm{Mon}\,\mathscr{C}(a)$ が成立つことが必要十分である．

1°　X が正則とする．$\beta\notin\mu(a)$ なら，$\mathscr{C}(a)$ の元 C で $\beta\notin\hat{C}$ なるものが存在する．C の内部を A とし，$B=X-C$ とすると，$A\in\mathscr{T}(a)$，$B\in\mathscr{T}_0(\beta)$，$A\cap B=\emptyset$ である．$\mu(a)\subset\hat{A}$，$\tilde{\mu}(\beta)\subset\hat{B}$ だから $\mu(a)\cap\tilde{\mu}(\beta)=\emptyset$．

2°　X が正則でないとすると，X の点 a で $\mu(a)\subsetneqq\mathrm{Mon}\,\mathscr{C}(a)$ なるものが存在する．$\mathrm{Mon}\,\mathscr{C}(a)$ の元 β で，$\beta\notin\mu(a)$ なるものを取る．$A\in\mathscr{T}(a)$ なら，A の閉包 $\bar{A}$ は $\mathscr{C}(a)$ に属する．$\beta{}^*\in{}^*(\bar{A})=(\overset{*}{\overline{{}^*A}})$（$\overset{*}{-}$ は＊閉包）．$\mathscr{L}$ の文《$\forall x\forall y[x\in\bar{A}\wedge y\in\mathscr{T}(x)\to A\cap y\neq\emptyset]$》は真，したがって＊真である．よって，${}^*\mathscr{T}(\beta)$ の任意の＊元 Γ に対し，${}^*A\,{}^*\!\cap\Gamma\neq{}^*\emptyset$．とくに $\mathscr{T}_0(\beta)$ の任意の元 B に対し，${}^*A\,{}^*\!\cap{}^*B\neq{}^*\emptyset$，すなわち $A\cap B\neq\emptyset$．したがって，$\mathscr{S}=\{A\cap B\,;\,A\in\mathscr{T}(a),\ B\in\mathscr{T}_0(\beta)\}$ は有限交差的，したがって定理 **3.1.13** により，${}^*X$ の＊元 γ で，$\gamma\in\mathrm{Mon}\,\mathscr{T}(a)\cap\mathrm{Mon}\,\mathscr{T}_0(\beta)=\mu(a)\cap\tilde{\mu}(\beta)$ なるものが存在する．∎

4.5.15　定理　ハウスドルフ空間 X が正規であるためには，条件

《$\alpha,\beta\in\hat{X}$，$\tilde{\mu}(\alpha)\cap\tilde{\mu}(\beta)\neq\emptyset$ なら，$\hat{X}$ の元 γ が存在して $\alpha\in\tilde{\mu}(\gamma)$，$\beta\in\tilde{\mu}(\gamma)$ となる》

が成立つことが必要十分である．

証明　1°　準備　$\hat{X}$ の点 α に対し，$\mathscr{F}_0(\alpha)=\{A\subset X\,;\,\alpha\in\hat{A}\}$ と置く（$a\in X$ なら，$\mathscr{F}_0(a)$ は a を含む単項超フィルターである）．$\mathscr{F}_0(\alpha)$ は X 上の超フィルターである．実際，フィルターであることは明らか．$A\subset X$ なら $\hat{X}=\hat{A}\cup{}^\wedge(X-A)$ だから $\alpha\in\hat{A}$ または $\alpha\in{}^\wedge(X-A)$．よって $A\in\mathscr{F}_0(\alpha)$ または $X-A\in\mathscr{F}_0(\alpha)$ となる．

2°　X が正規と仮定し，$\tilde{\mu}(\alpha)\cap\tilde{\mu}(\beta)\neq\emptyset$ とする．$A\in\mathscr{F}_0(\alpha)$，$B\in\mathscr{F}_0(\beta)$

なら $\bar{A}\cap\bar{B}\neq\emptyset$. 実際，もし $\bar{A}\cap\bar{B}=\emptyset$ なる A, B があれば，仮定により，$C\in\mathscr{T}_0(\alpha)$, $D\in\mathscr{T}_0(\beta)$ で $C\cap D=\emptyset$ なるものが存在し，$\tilde{\mu}(\alpha)\cap\tilde{\mu}(\beta)=\emptyset$ となってしまう．$\bar{A}\cap\bar{B}$ の点 c を取ると，任意の $C\in\mathscr{V}(c)$ に対して $A\cap C\neq\emptyset$, $B\cap C\neq\emptyset$ である．よって $\mathscr{L}$ の二変項論理式（略式）

$$\mathsf{x}=(\mathsf{u},\mathsf{v})\in\mathscr{F}_0(\alpha)\times\mathscr{F}_0(\beta)\wedge\mathsf{y}\in X\wedge\forall\mathsf{z}[\mathsf{z}\in\mathscr{V}(\mathsf{y})\rightarrow\mathsf{u}\cap\mathsf{z}\neq\emptyset\wedge\mathsf{v}\cap\mathsf{z}\neq\emptyset]$$

は $\mathscr{F}_0(\alpha)\times\mathscr{F}_0(\beta)$ 上 U の中で有限共起的である．したがって，共起性の原理によって $^*X$ の $*$ 元 γ が存在し，任意の $A\in\mathscr{F}_0(\alpha)$, 任意の $B\in\mathscr{F}_0(\beta)$, 任意の $\Gamma^*\in{}^*\mathscr{V}(\gamma)$ に対して $^*A^*\cap\Gamma\neq{}^*\emptyset$, $^*B^*\cap\Gamma\neq{}^*\emptyset$ となる．

この γ が求めるものである．実際，任意の $C\in\mathscr{V}_0(\gamma)$ に対して $\alpha,\beta\in\hat{C}$ が成立てばよい．$\mathscr{V}_0(\gamma)$ の元 C に対し，$\mathscr{B}=\{A\cap C\,;\,A\in\mathscr{F}_0(\alpha)\}$ と置くと，$\mathscr{B}$ はフィルター基底である．実際，まず $\mathscr{B}\neq\emptyset$. $^*A^*\cap{}^*C\neq{}^*\emptyset$, すなわち $A\cap C\neq\emptyset$ だから $\emptyset\notin\mathscr{B}$. $(A_1\cap C)\cap(A_2\cap C)=(A_1\cap A_2)\cap C\in\mathscr{B}$. $\mathscr{B}$ の生成するフィルターを $\mathscr{F}$ とすると，定義から明らかに $\mathscr{F}\supset\mathscr{F}_0(\alpha)$. $\mathscr{F}_0(\alpha)$ は超フィルターだから $\mathscr{F}=\mathscr{F}_0(\alpha)$. よって $\mathrm{Mon}\,\mathscr{B}=\mathrm{Mon}\,\mathscr{F}=\mathrm{Mon}\,\mathscr{F}_0(\alpha)$. 当然 $\mathrm{Mon}\,\mathscr{B}\subset\hat{C}$ だから $\alpha\in\hat{C}$, 同様に $\beta\in\hat{C}$.

3° X が正規でないとすると，定理 **4.2.4** の 2) により，閉集合 A, B で $A\cap B=\emptyset$, かつ $\mu(A)\cap\mu(B)\neq\emptyset$ なるものが存在する．$\mu(A)\cap\mu(B)$ の点 ξ を取る．命題 **4.5.8** により，$\hat{A}$ の点 α および $\hat{B}$ の点 β が存在して $\xi\in\tilde{\mu}(\alpha)\cap\tilde{\mu}(\beta)$ となる．$X=(X-A)\cup(X-B)$ だから，$\hat{X}$ の任意の点 γ は $\hat{}(X-A)$ または $\hat{}(X-B)$ に属する．$X-A$, $X-B$ は開集合だから $\tilde{\mu}(\gamma)\subset\hat{}(X-A)$ または $\tilde{\mu}(\gamma)\subset\hat{}(X-B)$. したがって $\alpha\notin\tilde{\mu}(\gamma)$ または $\beta\notin\tilde{\mu}(\gamma)$ となる．▮

練　習　問　題

1. $\{\mathscr{T}_i\,;\,i\in J\}$ を集合 X 上の位相の族とし，$\mathscr{T}_i$ の単子場を μ_i とする．

1) $\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}_2\Leftrightarrow$ あらゆる $a\in X$ に対して $\mu_1(a)\subset\mu_2(a)$.

2) $\mathscr{T}=\inf\{\mathscr{T}_i\,;\,i\in J\}=\bigcap_{i\in J}\mathscr{T}_i$ の単子場を μ とすると，$\mu(a)=\bigcup_{i\in J}\mu_i(a)$.

3) $\mathscr{T}'=\sup\{\mathscr{T}_i\,;\,i\in J\}\left(\bigcup_{i\in J}\mathscr{T}_i\right.$ の生成する位相$\left.\right)$ の単子場を μ' とすると，$\mu'(a)=\bigcap_{i\in J}\mu_i(a)$.

2.　1)　位相空間 X の任意の相異なる二点 a, b に対して《$[\exists A[A\in\mathscr{V}(a)\wedge b\notin A]]\vee[\exists B[B\in\mathscr{V}(b)\wedge a\notin B]]$》が成りたつとき，$X$ を T_0 空間と言う．この条件を単子のことばで書け．

2)　位相空間 X の任意の相異なる二点 a, b に対して《$\exists A[A\in\mathscr{V}(a)\wedge b\notin A]$》が成りたつとき，$X$ を T_1 空間と言う．この条件を単子のことばで書け．

3.　X が正則で A が X の閉部分集合なら，$\mu(A)\cap\mathscr{N}(X)=\bigcup\{\mu(a)\,;\,a\in A\}$.

4.　X を正則空間，A を X の部分集合とする．$\bar{A}$ (閉包) がコンパクトであるためには，$\hat{A}\subset\mathscr{N}(X)$ が必要十分である．

5.　位相空間 X の部分集合で，補集合がコンパクトなものの全体を $\mathscr{B}$ とし，$\mathrm{Mon}\,\mathscr{B}=\bigcap\{\hat{B}\,;\,B\in\mathscr{B}\}$ とする．X が局所コンパクトであるためには，$\mathrm{Mon}\,\mathscr{B}=\hat{X}-\mathscr{N}(X)$ が必要十分である．

6.　コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである．また，ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合である．これらを超準的に証明せよ．

7.　T_0 位相群は正則である．これを超準的に証明せよ．

8.　(X, d) を距離空間とする．$\hat{X}$ の点 α で，性質《任意の実数 $e>0$ に対し，X の点 a で $^*d(a,\alpha)\leqslant e$ なるものが存在する》をもつものの全体を X_0 とする．$\alpha,\beta\in X_0$ なら，$^*d(\alpha,\beta)$ は有限超実数である．$^*d(\alpha,\beta)\fallingdotseq 0$ のとき $\alpha\fallingdotseq\beta$ と書くと，$\fallingdotseq$ は X_0 上の同値関係である．$\fallingdotseq$ による X_0 の商集合を $\bar{X}$ と書き，$\bar{X}$ の元 $\bar{\alpha},\bar{\beta}$ $(\alpha,\beta\in X_0)$ に対して $\bar{d}(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\mathrm{st}[^*d(\alpha,\beta)]$ と置く（うまく定義される)．$(\bar{X},\bar{d})$ は距離空間で，X の完備化と同型である．

第五章　函　数　解　析

前章に続いて $\mathscr{U}$ は標準モデル，$^*\mathscr{U}$ は広大モデルとし，取扱う対象はすべて宇宙 U の元であるとする．前章では，位相空間の一般論を組織的に超準解析の言葉に書換えたが，この章はまったく性格を異にする．すなわち，ある一つの型の問題だけを超準的に扱い，その結果を測度および超函数に適用する．結果は未完である．

標準的諸定理を超準的に述べたり，簡単に証明したりすることはしない．よく知られた標準的結果は遠慮なく使う．

この章のいくつかの定理は，$^*\mathscr{U}$ が κ 級飽和モデル（κ は十分大きい基数）と仮定すると，証明が著るしく簡単になる．

§1　函数空間からの線型写像

X に位相のない場合

5.1.1　補題　集合 X から体（可換体のこと，以下同様）$\boldsymbol{K}$ への写像 $f_1, \cdots, f_n$ が線型独立なら，X の n 個の点 $x_1, \cdots, x_n$ を適当に取ると，$f_1, \cdots, f_n$ の $Y=\{x_1, \cdots, x_n\}$ への制限は線型独立となる．すなわち，行列 $(f_i(x_j))_{1<i,j<n}$ は可逆になる．

証明　1°　X の任意の有限部分集合 Y に対して，$f_1, \cdots, f_n$ の Y への制限が線型従属であると仮定する．$\mathscr{L}$ の二変項論理式 $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ を

$$\mathrm{x} \in X \wedge \mathrm{y}=(c_1, \cdots, c_n) \in \boldsymbol{K}^n \wedge \mathrm{y} \neq 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\mathrm{x})=0$$

とすると，仮定によって $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ は X 上 U の中で有限共起的であり，したがって $^*U$ の中で共起する．すなわち，$^*\boldsymbol{K}^n$ の元 $(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \notin (0, \cdots, 0)$ が存在し，X のあらゆる元 x に対して $\sum_{n=1}^{n} \gamma_i f_i(x)=0$ となる．$\hat{\boldsymbol{K}}$ は $\boldsymbol{K}$ 上

の線型空間だから，その中で $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ の張る部分線型空間（有限次元）の基底 $\{\sigma_j\,;\,j\in J\}$ を取り，$\gamma_i=\sum_{j\in J} c_{ij}\sigma_j$ と書く．任意の $x\in X$ に対し，

$$0=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j\in J}c_{ij}\sigma_j f_i(x)=\sum_{j\in J}\left[\sum_{i=1}^{n}c_{ij}f_i(x)\right]\sigma_j.$$

よって $\sum_{i=1}^{n} c_{ij}f_i(x)=0$. したがって $c_{ij}=0$, $\gamma_1=\cdots=\gamma_n=0$ となり矛盾する．

2°　1° により，X の有限個の元 $x_1, \cdots, x_k$ を適当に選ぶと，$n\times k$ 型行列 $(f_i(x_j))_{1<i<n,1<j<k}$ の階数は n, よって $x_1, \cdots, x_k$ のうちの n 個を適当に選べばよい．∎

5.1.2　定義　　この節を通じてつぎの記号を使う．

1)　$\boldsymbol{K}$ は体，V および W は $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間である．V から W への線型写像の全体を Z と書く．とくに $\boldsymbol{K}$ が位相体，V および W が $\boldsymbol{K}$ 上の位相線型空間の場合，V から W への連続線型写像の全体を $\mathscr{Z}$ と書くことにする．$v\in V$, $z\in Z$ 〖$\mathscr{Z}$〗 のとき，$z(v)$ のかわりに $\langle v, z\rangle$ と書く．

2)　X は集合，E は X から V への写像から成る（全部とは限らない）線型空間とする．

3)　X から Z 〖$\mathscr{Z}$〗 への写像で，その台が有限（ある有限集合の外では 0）であるものの全体を F 〖$\mathscr{F}$〗 と書く．F 〖$\mathscr{F}$〗 の元 h に対し，E から W への線型写像 T_h が

$$T_h(f)=\sum_{x\in X}\langle f(x), h(x)\rangle \qquad (f\in E)$$

によって定まる．とくに $V=W=\boldsymbol{K}$ なら $Z=\boldsymbol{K}$ で，$T_h(f)=\sum_{x\in X} f(x)h(x)$ である．

4)　これを＊解釈する：$^*F$ 〖$^*\mathscr{F}$〗 の＊元 φ に対し，$^*E$ から $^*W$ への＊線型写像 $^*T_\varphi$ が定まり，$\psi{}^*\in{}^*E$ に対して $^*T_\varphi(\psi)=\ {}^*\!\!\sum_{\xi{}^*\in{}^*X}\langle\psi(\xi), \varphi(\xi)\rangle$ となる．

5)　P を E から W への線型写像とする．我々の目標は，$^*F$ 〖$^*\mathscr{F}$〗 の＊

元φを見付けて，任意の$f\in E$に対して$*T_\varphi(*f)=P(f)$ないし$*T_\varphi(*f)\fallingdotseq P(f)$とすることである．

5.1.3 補題 1) 上の記号のもとで，Eの有限個の元$f_1,\cdots,f_n$に対し，Fの元hで，$T_h(f_i)=P(f_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$となるものが存在する．

2) とくに$\boldsymbol{K}$が$\boldsymbol{R}$または$\boldsymbol{C}$, VおよびWが$\boldsymbol{K}$上のハウスドルフ位相線型空間であり，さらにVが局所凸ならば，hは$\mathscr{F}$の元に取れる．

証明 nに関する帰納法による．Vが局所凸ならば，Vの有限次元部分空間は位相的補空間をもつことに注意（実際に使うのはこの性質だけである）．

1° $n=1$のとき．$f=0$なら$h=0$でよい．$f\neq 0$なら，$f(a)\neq 0$なる$a\in X$を取る．仮定により，Z【$\mathscr{Z}$】の元で，$\langle f(a),z\rangle=P(f)$なるものが存在する．$h(a)=z$, $x\neq a$に対して$h(x)=0$とすればhはF【$\mathscr{F}$】の元で条件をみたす．

2° $n-1$まで仮定する．$f_1,\cdots,f_n$が線型従属のとき，$f_n=\sum_{i=1}^{n-1}c_if_i$とし，$f_1,\cdots,f_{n-1}$に対して存在する$h$を取れば自然に$T_h(f_n)=P(f_n)$となる．

3° 以後$f_1,\cdots,f_n$は線型独立とする．Vの代数的基底$\{v_k\,;\,k\in K\}$を取り，$f_i(x)=\sum_{k\in K}g_i(k,x)v_k$と書く（有限和）．$g_1,\cdots,g_n$は$K\times X$から$\boldsymbol{K}$への写像として線型独立である．実際，$\sum_{i\in J}c_ig_i=0$とする．ただし，$J=\{1,\cdots,n\}$，以下同様．一つの$x$に対して$g_i(k,x)\neq 0$なる$k$は有限個しかないから，

$$0=\sum_{k\in K}\left[\sum_{i\in J}c_ig_i(k,x)\right]v_k=\sum_{i\in J}c_i\left[\sum_{k\in K}g_i(k,x)v_k\right]=\sum_{i\in J}c_if_i(x).$$

$f_1,\cdots,f_n$は線型独立だから$c_1=\cdots=c_n=0$.

補題 **5.1.1** により，$K\times X$のn元部分集合$Y=\{y_j=(k_j,x_j)\,;\,j\in J\}$が存在し，行列$(g_i(y_j))_{1<i,j<n}$は可逆となる．

4° $P(f_1),\cdots,P(f_n)$の張るWの部分空間（有限次元）の基底$\{W_l\,;\,l\in L\}$を取り，$P(f_i)=\sum_{l\in L}P_l(f_i)W_l$と書く．

各 l に対し，未知数 $(u_1, \cdots, u_n)$ に関する連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^{n} g_i(y_j)u_j = P_l(f_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

は唯一つの解 $(a_{1,l}, \cdots, a_{n,l})$ をもつ：

$$\sum_{j \in J} g_i(y_j)a_{j,l} = P_l(f_i) \qquad (l \in L,\ i \in J).$$

5°　Y の元 $y_j = (k_j, x_j)$ の第一成分 k_j の全体を K_1，第二成分 x_j の全体を S とする．$x \in S$ に対し，$J_x = \{j \in J\,;\, x_j = x\}$ と置くと，$\{J_x\,;\, x \in S\}$ は J の分割である．また，$f_i(x_j) = \sum_{k \in K} g_i(k, x_j)v_k$ と書くとき，ある i, j に対して $g_i(k, x_j) \neq 0$ となる k は有限個しかない．その全体を K_2 とする．$K_1 \cup K_2$ を含む K の有限部分集合 K_0 を適当に取ると，$\{v_k\,;\, k \in K_0\}$ の張る V の部分空間 V_0 が $f_i(x_j)$ をすべて含むようにできる．V_0 は有限次元である．

6°　$k \in K_0, l \in L$ に対し，〖局所凸の条件により〗，V_0 から W への〖連続〗線型写像 $z'_{k,l}$ で，任意の $k' \in K_0$ に対して $\langle v_{k'}, z'_{k,l} \rangle = \delta_{k',k} W_l$ となるものが存在する．V_0 の〖位相的〗補空間の上で 0 として $z'_{k,l}$ を Z〖$\mathscr{Z}$〗の元 $z_{k,l}$ に延長すれば，任意の $k' \in K_0$ に対して $\langle v_{k'}, z_{k,l} \rangle = \delta_{k',k} W_l$ となる．

7°　X 上の函数 h を，$x \in S$ に対して，$h(x) = \sum_{j \in J_x} \sum_{l \in L} a_{j,l} z_{k_j,l}$ と置き，$x \notin S$ に対して $h(x) = 0$ として定めると，h は F〖$\mathscr{F}$〗に属する．任意の $i \in J$ に対し，

$$\begin{aligned}
T_h(f_i) &= \sum_{x \in S} \langle f_i(x), h(x) \rangle = \sum_{x \in S} \Big[\sum_{j \in J_x} \langle f_i(x),\ \sum_{l \in L} a_{j,l} z_{k_j,l} \rangle \Big] \\
&= \sum_{x \in S} \Big[\sum_{j \in J_x} \langle f_i(x_j), \sum_{l \in L} a_{j,l} z_{k_j,l} \rangle \Big] = \sum_{j \in J} \langle f_i(x_j), \sum_{l \in L} a_{j,l} z_{k_j,l} \rangle \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{k \in K_0} \sum_{l \in L} g_i(k, x_j) a_{j,l} \langle v_k, z_{k_j,l} \rangle = \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} g_i(k_j, x_j) a_{j,l} w_l \\
&= \sum_{l \in L} P_l(f_i) w_l = P(f_i). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

5.1.4　定理　　定義 5.1.2 の記号のもとで，${}^*F$ の＊元 φ が存在し，あらゆる $f \in E$ に対して ${}^*T_\varphi({}^*f) = P(f)$ となる．とくに，$\boldsymbol{K}$ が $\boldsymbol{R}$ また

は C, V および W が K 上のハウスドルフ位相線型空間であり，さらに V が局所凸ならば，φ は $^*\mathscr{F}$ の＊元に取れる．

証明 $\mathscr{L}$ の二変項論理式 $\phi(\mathrm{x},\mathrm{y}):\mathrm{x}=f\in E\wedge\mathrm{y}=h\in F[\![\mathscr{F}]\!]\wedge T_h(f)=P(f)$ は補題によって E 上 U の中で有限共起的，したがって $^*U$ の中で共起する．∎

5.1.5 例 $(X, \boldsymbol{B}, m)$ を測度空間とし，実数値可積函数の全体を E とする．$f\in E$ に対し，$P(f)=\int_X f\,dm$ とすれば定理が適用される：$^*X$の＊有限部分集合 Γ およびその上の＊実数値函数 φ が存在し，任意の $f\in E$ に対して $\int_X f\,dm={}^*T_\varphi(f)={}^*\sum_{\xi^*\in\Gamma}{}^*f(\xi)\varphi(\xi)$ となる．これは（＊の意味で）重み $\varphi(\xi)$ をもつ標本測度とでも言うべきものである．これについてはあとでもっと詳しく調べる．

X に位相がある場合

5.1.6 補題 定義 5.1.2 の記号のもとで，K は R または C とし，V および W は K 上のバナハ空間であるとする．また，X はハウスドルフ局所コンパクト空間とし，E は X から V への連続写像から成るとする．

さらに，mを X 上のラドン測度で，いたるところ真に正なものとする．すなわち，X の任意の開集合 A に対し，$m(A)>0$ とする．

任意の実数 $e>0$ および E の元 $f_1,\cdots,f_n$ に対し，$\mathscr{X}$（これもバナハ空間）の有限次元部分空間 $\mathscr{X}_0$ および X から $\mathscr{X}_0$ への連続写像 g で，台がコンパクトなものが存在し，

$$\|m(\langle f_i, g\rangle)-P(f_i)\|\leqslant e \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

となる．ただし，$\langle f_i, g\rangle$ は X から W への写像 $x\mapsto\langle f_i(x), g(x)\rangle$ を表わす．

とくに X が C^∞ 多様体なら，g は C^∞ 函数に取れる．

証明 1° 補題 5.1.3 の 2) により，$\mathscr{F}$ の元 h で，$T_h(f_i)=P(f_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ となるものが存在する．$h=0$ なら $g=0$ とすればよいから，$h\neq0$ とする．h の台を $\{a_1,\cdots,a_r\}$ とする．各 a_s $(1\leqslant s\leqslant r)$ に対し，そのコン

パクト近傍 A_s を，たがいに共通点がないように取る． 各 s に対し，X から $\mathscr{X}$ のある一次元部分空間に値を取る連続〚C^∞〛函数 g_s で，その台が A_s に含まれ，しかも $\|m(\langle f_i, g_s\rangle)-\langle f_i(a_s), h(a_s)\rangle\| \leqq \frac{e}{r}(1\leqq i\leqq n)$ となるものが存在することを示す． もしこれが言えたとすれば，$g=\sum_{s=1}^{r} g_s$ と置くと，g は連続〚C^∞〛, g の台はコンパクト，その値は $\mathscr{X}$ の有限次元部分空間に含まれ，しかも

$$\|m(\langle f_i, g\rangle)-P(f_i)\| \leqq \sum_{s=1}^{r}\|m(\langle f_i, g_s\rangle)-\langle f_i(a_s), h(a_s)\rangle\| \leqq e$$

となって証明を終る．

2°　A_s の内部 A_s° に含まれる a_s のコンパクト近傍 C_s を十分小さく取ると，$x\in C_s$ なら，$\|f_i(x)-f_i(a_s)\| \leqq \frac{e}{2r\|h(a_s)\|}$ となる．

3°　$\max\{\|f_i(x)\|\,;\,1\leqq i\leqq n,\ x\in\bigcup_{s=1}^{r} A_s\}$ を M とする．$M=0$ なら $g=0$ でよいから，$M>0$ とする．仮定によって $m(C_s)>0$ だから，$C_s\subset B_s^\circ\subset B_s\subset A_s^\circ$（$B_s^\circ$ は B_s の内部）なるコンパクト集合 B_s を十分小さく取ると，

$$m(B_s-C_s) \leqq \frac{m(C_s)}{2rM\|h(a_s)\|}e$$

となる．

4°　$h(a_s)$ の張る $\mathscr{X}$ の一次元部分空間 $\mathscr{X}_s$ は $\boldsymbol{K}$ と同型だから，X から $\mathscr{X}_s$ への連続〚C^∞〛函数 g_s で，つぎの条件をみたすものが存在する：

a)　g_s の台は B_s に含まれる．

b)　$x\in C_s$ なら $g_s(x)=\frac{h(a_s)}{m(C_s)}$．

c)　$\|g_s(x)\| \leqq \frac{\|h(a_s)\|}{m(C_s)}$．

5°　任意の i $(1\leqq i\leqq n)$ に対し，

$$\begin{aligned}&\|m(\langle f_j, g_s\rangle)-\langle f_i(a_s), h(a_s)\rangle\|\\ &=\Big\|\int_{C_s}\langle f_i(x), g_s(x)\rangle dm(x)+\int_{B_s-C_s}\langle f_i(x), g_s(x)\rangle dm(x)\\ &\quad -\int_{C_s}\langle f_i(a_s); g_s(a_s)\rangle dm(x)\Big\|\end{aligned}$$

$$\leqq \|g_s(a_s)\| \int_{C_s} \|f_i(x)-f_i(a_s)\| dm(x) + M \frac{\|h(a_s)\|}{m(C_s)} m(B_s - C_s)$$

$$\leqq \|g_s(a_s)\| \frac{e}{2r\|h(a_s)\|} m(C_s) + \frac{e}{2r} = \frac{e}{r}. \quad \blacksquare$$

5.1.7 定理　上の補題と同じ記号および仮定のもとで，$^*\mathscr{Z}$ の$*$有限次元部分空間 Ω および $^*X$ から Ω への$*$連続写像 φ で，台が$*$コンパクトなものが存在し，任意の $f \in E$ に対して $^*m(\langle ^*f, \varphi \rangle) \fallingdotseq P(f)$ となる．印象的に書けば，

$$^*\!\!\int_{^*X} \langle ^*f(\xi), \varphi(\xi) \rangle \, ^*dm(\xi) \fallingdotseq P(f).$$

すなわち，線型写像 P は，$*$の意味での積分変換によって無限に近似できる．

とくに X が C^∞ 多様体なら，φ は $^*C^\infty$ 函数に取れる．

証明　$\mathscr{Z}$ の有限次元部分空間の全体を $\mathscr{S}$ と書き，$\mathscr{S}$ の元 $\mathscr{Z}_0$ に対し，X から $\mathscr{Z}_0$ への台がコンパクトな連続〚C^∞〛函数の全体を $C_0(X, \mathscr{Z}_0)$〚$C_0^\infty(X, \mathscr{Z}_0)$〛と書く．また，今後 $\{x \in \boldsymbol{R} ; x > 0\}$ を $\boldsymbol{R}^{++}$ と書くことにする．$\mathscr{L}$ の二変項論理式 $\phi(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ を，略式で

$$\mathsf{x} = (e, f) \in \boldsymbol{R}^{++} \times E \wedge \mathsf{y} = (\mathscr{Z}_0, g) \in \mathscr{S} \times C_0(X, \mathscr{Z}_0) \ 〚\mathscr{S} \times C_0^\infty(X, Z_0)〛$$
$$\wedge \|m(\langle f, g \rangle) - P(f)\| \leqq e$$

とする．補題によって ϕ は $\boldsymbol{R}^{++} \times E$ 上 U の中で有限共起的，したがって $^*U$ の中で共起する．すなわち，$^*\mathscr{Z}$ の$*$有限次元部分空間 Ω および $^*C_0(^*X, \Omega)$〚$^*C_0^\infty(^*X, \Omega)$〛の$*$元 φ が存在し，任意の $e > 0$ および任意の $f \in E$ に対して $\|^*m(\langle ^*f, \varphi \rangle) - ^*P(^*f)\| \leqq e$ となる．e は任意だから，これは $^*m(\langle ^*f, \varphi \rangle) \fallingdotseq P(f)$ を意味する．$\blacksquare$

注意　$*$積分は分りにくい概念のように思えるが，超冪モデルの場合を考えると分りやすい．$\varphi = [\varphi_i]_{i \in I}$ なら，

$$^*\!\!\int_{^*X} \langle ^*f(\xi), \varphi(\xi) \rangle \, ^*dm(\xi) = \left[\int_X \langle f(x), \varphi_i(x) \rangle dm(x) \right].$$

一般函数とくに超函数

特別な場合としてつぎの系が得られる．

5.1.8　系　K を R または C とする．E を R^m から K への連続函数から成る線型空間とし，P を E 上の線型形式（E から K への線型写像）とする．このとき，$^*R^m$ から $^*K$ への $^*C^\infty$ 函数で台が$*$コンパクトなものφが存在し，任意の $f\in E$ に対して

$$P(f)\doteqdot {}^*\int_{^*R^m} {}^*f(\xi)\varphi(\xi){}^*d\xi$$

となる．ただし，$^*d\xi$ は $^*R^m$ 上の$*$ルベーグ測度である．

したがって，ゲルファント・シーロフの意味での一般函数，とくにシュヴァルツの超函数は，すべて上の形（右辺の標準部分）で表現される．

5.1.9　定理　とくに E の元の台がすべてコンパクトなら，$^*K$ 係数の m変数$*$多項式 $\pi(\xi)$〘フーリエ多項式でもよい〙が存在し，任意の $f\in E$ に対して

$$P(f)\doteqdot {}^*\int_{^*R^m} {}^*f(\xi)\pi(\xi){}^*d\xi$$

と書ける．

証明　1°　補題 5.1.6 に戻る．そこの記号で $f_1,\cdots,f_n$ および g はすべて台がコンパクトだから，その合併 K もコンパクトである．ワイヤストラスの近似定理により，任意の $e>0$ に対し，m変数多項式〘フーリエ多項式〙pが存在し，$x\in K$ に対して $|g(x)-p(x)|\leqslant\dfrac{e}{M\cdot k}$ となる．ただし，$M=\max\{|f_i(x)|\,;\,x\in K, 1\leqslant i\leqslant n\}$，$k=\int_K 1dx$ である．したがって，

$$\left|\int_{R^m} f_i(x)g(x)dx-\int_{R^m} f_i(x)p(x)dx\right|\leqslant e$$

となり，

$$\left|\int_{R^m} f_i(x)p(x)dx-P(f_i)\right|\leqslant 2e$$

となる．ただし，dx は R^m のルベーグ測度である．

2°　K 係数のm変数多項式〘フーリエ多項式〙の全体を A と書くと，$\mathscr{L}$ の二変項論理式

$$\mathsf{x}=(e,f)\in R^{++}\times E \wedge \mathsf{y}=p\in A\wedge\left|\int_{R^m} f(x)p(x)dx-P(f)\right|\leqslant e$$

は $R^{++}\times E$ 上 U で有限共起的，したがって $^*U$ の中で共起する．∎

5.1.10 注意 この定理はとくにシュヴァルツの超函数の場合に適用される．それが，ロビンソン [3] で直接証明してあることである．

超函数をこの形ないし系 **5.1.8** の形に書くことが，“標準” 数学の研究に何かの意味で役に立つものかどうか，いまのところ分らない．少くともいままでのところ，役に立っていないと思う．

§2 正値線型形式

正値線型形式

5.2.1 定義 1) 実数体 $\boldsymbol{R}$ に理想元 $+\infty$ および $-\infty$ を付加えた集合 $\bar{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ を考え，これに常識どおりの順序を入れる．この全順序から定まる位相によって，$\bar{\boldsymbol{R}}$ はハウスドルフ・コンパクト空間になる．これを**補端実直線**と言うことがある．$V_a=\{x\in\bar{\boldsymbol{R}}\,;\,x>a\}$ とするとき，$\{V_a\,;\,a\in\boldsymbol{R}\}$ は $\bar{\boldsymbol{R}}$ での $+\infty$ の近傍の基本系である．$-\infty$ についても同様．

2) $\bar{\boldsymbol{R}}$ の算法として，$\boldsymbol{R}$ 内の算法のほかにつぎのものを考える（複号同順）：$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$．$a\in\boldsymbol{R}$ なら $a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=\pm\infty$．$a\in\boldsymbol{R}^{++}$ なら $a\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot a=\pm\infty$．$0\cdot(\pm\infty)$ は定義しない．

3) $^*\mathscr{U}$ において $^*\bar{\boldsymbol{R}}={}^*\boldsymbol{R}\,{}^*\cup{}^*\{+\infty,-\infty\}$，$\hat{\bar{\boldsymbol{R}}}=\hat{\boldsymbol{R}}\cup\{+\infty,-\infty\}$．$\bar{\boldsymbol{R}}$ はコンパクトだから，定理 **4.2.9** により，$\hat{\bar{\boldsymbol{R}}}$ の元はすべて近標準点である．とくに $\mu(+\infty)$〘$\mu(-\infty)$〙は，正〘負〙の無限大超実数の全体に $+\infty$〘$-\infty$〙を付加えたものである．だから，α が正〘負〙の無限大超実数のとき，$\alpha\fallingdotseq+\infty$〘$\alpha\fallingdotseq-\infty$〙と書く．

注意 この定義によれば，α,β がともに正の無限大超実数のとき，定義 **4.2.2** に従うと，$\alpha\fallingdotseq\beta$ となる．これは第一章の定義 **1.3.1** と矛盾する．定義 **1.3.1** は $\boldsymbol{R}$ という位相群から定まる一様構造によるものであり，今度の定義 **5.2.1** は $\bar{\boldsymbol{R}}$ というコンパクト位相によるものだから，一致しないのは当然である．むしろ，これによって，解析学における無限遠点の扱いが，どういう点で有限点と異ならなければならないかがはっきり分る．

5.2.2　定義　この節ではつぎの記号を使う．

1)　X は集合，E は X から $\boldsymbol{R}^+$ への写像から成る空でない集合で，《$f, g \in E,\ a, b \in \boldsymbol{R}^+ \Rightarrow af+bg \in E$》なるものとする．とくに $0 \in E$.

2)　P は E から $\bar{\boldsymbol{R}}^+ = \{x \in \bar{\boldsymbol{R}}\ ;\ x \geqslant 0\}$ への写像で，つぎの四条件をみたすものとする（$\Rightarrow$ の右側の算法，等式，不等式は $\bar{\boldsymbol{R}}$ におけるもの）：

a)　$P(0)=0$.

b)　$a \in \boldsymbol{R}^{++},\ f \in E \Rightarrow P(af) = aP(f)$.

c)　$f, g \in E \Rightarrow P(f+g) = P(f)+P(g)$.

d)　$f, g \in E,\ f \leqslant g \Rightarrow P(f) \leqslant P(g)$.

3)　$E_P = \{f \in E\ ;\ P(f) < +\infty\}$ と置く．$0 \in E_P$.

4)　X から $\boldsymbol{R}^+$ への写像で，台が有限なものの全体を F とする．定義 **5.1.2** と同様に，$h \in F$ に対して $T_h(f) = \sum_{x \in X} f(x)h(x)$ $(f \in E)$ と置くと，T_h は E から $\boldsymbol{R}^+$ への写像で，条件 a), b), c), d) をみたす．

5.2.3　補題　上の記号のもとで，$f_1, \cdots, f_l$ を E_P の元，$f_{l+1}, \cdots, f_n$ を $E-E_P$ の元，e を正（>0）の実数，N を自然数とする．このとき，F の元 h で，

$$1 \leqslant i \leqslant l \quad \text{なら} \quad |P(f_i) - T_h(f_i)| \leqslant e,$$
$$l < i \leqslant n \quad \text{なら} \quad T_h(f_i) \geqslant N$$

となるものが存在する．

証明　1°　$\tilde{E}_P = \{f-g\ ;\ f, g \in E_P\}$ は線型空間である．$P(f)-P(g)$ を $P(f-g)$ と置くことにより，P は $\tilde{E}_P$ 上の線型形式に延長される（矛盾なく定義される）．しかも，P は正値，すなわち $f \in \tilde{E}_P$，$f \geqslant 0$ なら $P(f) \geqslant 0$ である．証明はやさしい．

2°　$V = \left\{\sum_{i=1}^{l} a_i f_i\ ;\ a_i \in \boldsymbol{R}\right\}$ は $\tilde{E}_P$ の有限次元部分空間である．$f_0 = f_1 + \cdots + f_l$ とおくと，$f_0 \in E_P$．f_0 の台を X_0 とする．

$P(f_0)=0$ のとき，$h_0 = 0$（F の元）と置く．

$P(f_0)>0$ のとき，V の双対空間 V' から $\boldsymbol{R}^l$ への写像 $\boldsymbol{f}$ を，$s \in V'$ に対して $\boldsymbol{f}(s) = (s(f_1), \cdots, s(f_l))$ によって定める．$s \geqslant 0$ なら $\boldsymbol{f}(s)_i = s(f_i) \geqslant 0$.

さらに，$x \in X_0$ に対して $s_x \in V'$ を，$s_x(f)=\dfrac{f(x)}{f_0(x)}$ ($f \in V$) によって定める．

$$\boldsymbol{f}(s_x)=(s_x(f_1), \cdots, s_x(f_l))=\left(\frac{f_1(x)}{f_0(x)}, \cdots, \frac{f_l(x)}{f_0(x)}\right).$$

3° $\tilde{E}_P$ 上の線型形式 P の V への制限 (V' の元) を同じ P で表わす．このとき，$\boldsymbol{f}\left(\dfrac{P}{P(f_0)}\right)$ ($\boldsymbol{R}^l$ の元) は $\{\boldsymbol{f}(s_x)\,;\, x \in X_0\}$ の閉凸包 C に属する．

証明　結論を否定すると，$\boldsymbol{R}^l$ の点 $\boldsymbol{f}\left(\dfrac{P}{P(f_0)}\right)$ と C とはある超平面によって真に分離される．したがって，実数 $b_0, b_1, \cdots, b_l$ が存在し，

$$\sum_{i=1}^{l} b_i \frac{P(f_i)}{P(f_0)} > b_0 > \sup_{x \in X_0} \sum_{i=1}^{l} b_i \frac{f_i(x)}{f_0(x)}$$

となる．$g=\sum_{i=1}^{l} b_i f_i$ とすると，$g \in V$ で，$\dfrac{P(g)}{P(f_0)} > b_0 > \sup_{x \in X_0} \dfrac{g(x)}{f_0(x)}$ が成立つ．よって，あらゆる $x \in X_0$ に対して $g(x) < b_0 f_0(x)$ となる．$x \notin X_0$ なら両辺とも 0 だから $g \leqslant b_0 f_0$，したがって $P(g) \leqslant b_0 P(f_0)$ となる．すなわち $\dfrac{P(g)}{P(f_0)} \leqslant b_0$ となり，矛盾する．

4° したがって，X_0 の有限個の点 $x_1, \cdots, x_m$ および同数の実数 $a_1, \cdots, a_m$ で $a_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $\sum_{j=1}^{m} a_j = 1$ なるものを適当に取ると，

$$\left\| \boldsymbol{f}\left(\frac{P}{P(f_0)}\right) - \sum_{j=1}^{m} a_j \boldsymbol{f}(s_{x_j}) \right\| \leqslant \frac{e}{2P(f_0)}$$

となる．ノルムは成分の絶対値の最大値である．したがって

$$\left| \frac{P(f_i)}{P(f_0)} - \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{f_i(x_j)}{f_0(x_j)} \right| \leqslant \frac{e}{2P(f_0)} \qquad (1 \leqslant i \leqslant l),$$

$$\left| P(f_i) - \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j P(f_0)}{f_0(x_j)} f_i(x_j) \right| \leqslant \frac{e}{2}$$

となる．ここで，X 上の函数 h_0 を，$h_0(x_j)=\dfrac{a_j P(f_0)}{f_0(x_j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$，その他の x に対して $h_0(x)=0$ と置いて定めると，$h_0 \in F$ で，

$$|P(f_i) - T_{h_0}(f_i)| = \left| P(f_i) - \sum_{x \in X} f_i(x) h_0(x) \right| \leqslant \frac{e}{2}$$

が成りたつ．

5°　$l=n$ なら $h=h_0$ として証明を終る．以後 $l<n$ とし，$N\geqq 1$ とする．$l+1\leqq m\leqq n$ なる m を取り，　$l+1\leqq k\leqq m$ なら f_k の台は X_0 に含まれず，$m+1\leqq k\leqq n$ なら f_k の台は X_0 に含まれるとしよう．

イ）$l+1\leqq k\leqq m$ なら，X_0 に属さない点 y_k で，$f_k(y_k)>0$ なるものが存在する．X 上の函数 h_k を，$h_k(y_k)=\dfrac{N}{f_k(y_k)}$，その他の $y\in X$ に対して $h_k(y)=0$ と置いて定める．

ロ）$m+1\leqq k\leqq n$ のとき，まず $N'=\dfrac{2(n-l)N}{e}$ とする．$P(f_k)=+\infty$ だから，$f_k\not\leqq N'f_0$．よって X_0 の点 y_k で，$f_k(y_k)>N'f_0(y_k)$ なるものが存在する．そこで, X 上の函数 h_k を,

$$h_k(y_k)=\frac{N}{N'f_0(y_k)}=\frac{e}{2(n-l)f_0(y_k)},$$

その他の y に対して $h_k(y)=0$ として定める．

6°　$h=h_0+\sum_{k=l+1}^{n} h_k$ と置く．h は F に属する．$1\leqq i\leqq l$ なる i に対し，

$$|P(f_i)-T_h(f_i)|\leqq|P(f_i)-T_{h_0}(f_i)|+\sum_{k=l+1}^{n} T_{h_k}(f_i)$$

$$\leqq\frac{e}{2}+\sum_{k=l+1}^{n} f_i(y_k)h_k(y_k)\leqq\frac{e}{2}+\sum_{k=m+1}^{n} f_0(y_k)h_k(y_k)\leqq e.$$

$l+1\leqq k\leqq n$ なる k に対し，$T_h(f_k)\geqq T_{h_k}(f_k)=f_k(y_k)h_k(y_k)$.

$k\leqq m$ なら $f_k(y_k)h_k(y_k)=N$.

$k>m$ なら $f_k(y_k)h_k(y_k)\geqq N'f_0(y_k)\cdot\dfrac{N}{N'f_0(y_k)}=N$.

したがって，$T_h(f_k)\geqq N$ $(l+1\leqq k\leqq n)$. ▮

5.2.4 定理　　定義 **5.2.2** の記号のもとで，$^*F$ の$*$元φが存在し，E のあらゆる元fに対して $P(f)\fallingdotseq{}^*T_\varphi(^*f)={}^*\sum_{\xi{}^*\in{}^*X}{}^*f(\xi)\varphi(\xi)$ が成立つ．ただし，$\fallingdotseq$ は $^*\bar{\boldsymbol{R}}$ でのものである．

証明　　$\mathscr{L}$ の二変項論理式 $\phi(\mathsf{x},\mathsf{y})$ を（略式で）

$\mathsf{x}=(f,e,N)\in E\times\boldsymbol{R}^{++}\times\boldsymbol{N}\wedge\mathsf{y}=h\in F\wedge[f\in E_P\to|P(f)-T_h(f)|\leqq e]$
$\wedge[f\in E-E_P\to T_h(f)\geqq N]$

とすると，　補題によってϕは $E\times\boldsymbol{R}^{++}\times\boldsymbol{N}$ 上 U の中で有限共起的，した

がって $^*U$ の中で共起する．すなわち，$^*F$ の$*$元φが存在し，$f\in E_P$ なら $^*T_\varphi(^*f)\fallingdotseq {}^*P(^*f)=P(f)$ となり，$f\in E-E_P$ なら $^*T_\varphi(^*f)\fallingdotseq+\infty=P(f)$ となる．▮

5.2.5　記号　1)　X の部分集合 A の特性函数を d_A と書く．

2)　X の有限部分集合 C および実数 $r>0$ に対し，$\frac{1}{r}T_{d_C}$ のことを $T_{C,r}$ と書く：$T_{C,r}(f)=\frac{1}{r}\sum_{x\in C}f(x)$. これを$*$解釈する：$^*X$ の$*$有限部分集合 Γ および超実数 $\rho>0$ に対し，$^*T_{\Gamma,\rho}(\psi)=\frac{1}{\rho}\ {}^*\!\!\sum_{\xi\,^*\!\in\Gamma}\psi(\xi)$.

5.2.6　補題　定義 5.2.2 の記号のもとで，X は孤立点のないハウスドルフ空間だとし，E の元はすべて連続とする．このとき，補題 5.2.3 の函数 h は，X のある有限部分集合の特性函数の定数倍に取れる．すなわち，補題の記号および仮定のもとで，X の有限部分集合 C および自然数 r が存在し，

$$1\leqslant i\leqslant l \quad \text{なら} \quad \left|P(f_i)-\frac{1}{r}\sum_{x\in C}f_i(x)\right|=|P(f_i)-T_{C,r}(f_i)|\leqslant e,$$

$$l+1\leqslant i\leqslant n \quad \text{なら} \quad T_{C,r}(f_i)=\frac{1}{r}\sum_{x\in C}f_i(x)\geqslant N$$

となる．

証明　1°　補題の函数 h の台を $\{x_1,\cdots,x_k\}$ とする．

$$M=\max\left\{\sum_{j=1}^{k}f_i(x_j)\ ;\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

と置く．$h(x_1),\cdots,h(x_k)$ を有理数で近似して通分すると，自数然 $r,q_1,\cdots,q_k$ が存在し，$\left|h(x_j)-\frac{q_j}{r}\right|\leqslant\frac{e}{2M}$ $(1\leqslant j\leqslant k)$ となる．$q=q_1+\cdots+q_k$ と置く．仮定により，各 x_j の近傍 A_j を十分小さく取ると，それらはどの二つも共通点を持たず，しかも $y\in A_j$ なら $|f_i(x_j)-f_i(y)|\leqslant\frac{re}{2q}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ となる．仮定によって A_j は無限集合だから，各 A_j から q_j 個の点 $y_{j,1},\cdots,y_{j,q_j}$ を取り，その全部の集合を C とする．C は q 個の点から成る．

$$2° \quad \left|\frac{1}{r}\sum_{x\in C} f_i(x)-T_h(f_i)\right| = \left|\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{k}\sum_{p=1}^{q_j} f_i(y_{j,p})-\sum_{j=1}^{k} f_i(x_j)h(x_j)\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{k}\sum_{p=1}^{q_j} f_i(y_{j,p})-\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{k} q_j f_i(x_j)\right|$$

$$+\left|\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{k} q_j f_i(x_j)-\sum_{j=1}^{k} f_i(x_j)h(x_j)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{k}\sum_{p=1}^{q_j} |f_i(y_{j,p})-f_i(x_j)| + \sum_{j=1}^{k} f_i(x_j)\left|\frac{q_j}{r}-h(x_j)\right|$$

$$\leqslant \frac{q}{r}\cdot\frac{re}{2q}+\frac{e}{2M}\sum_{j=1}^{k} f_i(x_j) \leqslant e.$$

よって，$i\leqslant l$ なら $\left|\frac{1}{r}\sum_{x\in C} f_i(x)-P(f_i)\right|\leqslant 2e$ となり，$l+1\leqslant i\leqslant n$ なら $\frac{1}{r}\sum_{x\in C} f_i(x)\geqslant N-e$ となる．▮

5.2.7　定理　X を孤立点のないハウスドルフ空間とし，E を X から $\boldsymbol{R}^+$ への連続写像から成る空でない集合で，《$f, g\in E,\ a, b\in \boldsymbol{R}^+ \Rightarrow af+bg \in E$》なるものとする．$P$ が E から $\bar{\boldsymbol{R}}^+$ への写像で，定義 **5.2.2** の 2) の三条件をみたすならば，$^*X$ の＊有限部分集合 Γ および超自然数 ρ が存在し，任意の $f\in E$ に対して

$$P(f) \fallingdotseq {}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f) = \frac{1}{\rho}\,{}^*\!\!\sum_{\xi\,{}^*\!\in\Gamma} {}^*f(\xi)$$

が成立つ．

証明　補題 **5.2.3** の記号を使って，$\mathscr{L}$ の二変項論理式 $\phi(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ を，

$\mathsf{x}=(f, e, N)\in E\times \boldsymbol{R}^{++}\times \boldsymbol{N} \wedge \mathsf{y}=(C, r)\in \mathscr{S}(X)\times \boldsymbol{N} \wedge$

$[f\in E_P \rightarrow |P(f)-T_{C,r}(f)|\leqslant e] \wedge [f\in E-E_P \rightarrow T_{C,r}(f)\geqslant N]$

とすればよい（共起性の原理による）．ただし，$\mathscr{S}(X)$ は X の有限部分集合の全体である．▮

測　　度

5.2.8　定理　$(X, \boldsymbol{B}, m)$ を測度空間とする．$^*X$ から $^*\boldsymbol{R}^+$ への＊写像 φ で台が＊有限なものが存在し，可測で積分確定な任意の函数 $f : X\rightarrow \boldsymbol{R}$ に

対して

$$\int_X f\,dm \fallingdotseq {}^*T_\varphi({}^*f) = {}^*\sum_{\xi{}^*\in{}^*X} {}^*f(\xi)\varphi(\xi)$$

が成りたつ．すなわち，f が可積なら ${}^*T_\varphi({}^*f) \fallingdotseq \int_X f\,dm$. f が可測，非可積で積分値が $+\infty$ 【$-\infty$】なら ${}^*T_\varphi({}^*f)$ は正【負】の無限大超実数である．

証明　X 上の正値可測函数の全体を E とし，$P(f)=\int_X f\,dm\,(f\in E)$ として定理 **5.2.4** を適用すると，$f\in E$ に対して定理が成りたつ．一般の積分確定な函数 f に対しては，$f=f^+-f^-$ (f^+, f^- は正値で，少くとも一方は可積) と書けばよい．■

5.2.9　定義　1) 測度空間 $(X, \boldsymbol{B}, m)$ の定義で，集合族 $\boldsymbol{B}$ および測度 m の可算加法性を有限加法性で置きかえたものを**有限加法的測度空間**と言い，m を**有限加法的測度**と言うことにする．

2) X を集合，hを X から $\boldsymbol{R}^+$ への函数で，台が有限なものとする．X の部分集合 A に対し，$m_h(A)=T_h(d_A)=\sum_{x\in A} h(x)$ と置く．

3) Ω を＊集合，φを Ω から ${}^*\boldsymbol{R}^+$ への函数で，台が＊有限なものとする．Ω の＊部分集合 Λ に対し，${}^*m_\varphi(\Lambda)={}^*T_\varphi(\delta_\Lambda)={}^*\sum_{\xi{}^*\in\Lambda}\varphi(\xi)$ と置く．ただし，δ_Λ は Λ の特性函数である．

5.2.10　命題　1) hが X から $\boldsymbol{R}^+$ への台が有限な函数なら，m_h は $\mathscr{P}(X)$ 全体で定義された無制限に加法的な測度である．すなわち，$\{A_i\,;\,i\in I\}$ が X の部分集合の無共分族ならば，有限個を除く i については $m_h(A_i)=0$ となり，したがって $m_h\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)=\sum_{i\in I} m_h(A_i)$ となる．

2) φがΩから${}^*\boldsymbol{R}^+$への台が＊有限な函数なら，${}^*m_\varphi$ は ${}^*\mathscr{P}(\Omega)$ 全体で定義された無制限に加法的な＊測度である．すなわち，${}^*\{\Lambda_\nu\,;\,\nu{}^*\in\Theta\}$が Ω の＊部分集合の無共分＊族ならば，＊有限個を除く ν については ${}^*m_\varphi(\Lambda_\nu)=0$ となり，したがって ${}^*m_\varphi\left({}^*\bigcup_{\nu{}^*\in\Theta}\Lambda_\nu\right)={}^*\sum_{\nu{}^*\in\Theta}{}^*m_\varphi(\Lambda_\nu)$ となる．

注意　測度 m_h はごくつまらないものである．しかし，定理 **5.2.8** を考えると，＊測度 ${}^*m_\varphi$ はつまらないものとは言えない．

証明　1)　h の台を C とすると，$\{A_i\cap C\,;\,i\in I\}$ は有限集合 $A\cap C$ の分割である．だから有限個を除く i については $A_i\cap C=\emptyset$，よって $m_h(A_i)=\sum_{x\in A_i\cap C}h(x)=0$ となる．

2) は 1) を＊解釈すればよい．▮

5.2.11　定理　$(X,\boldsymbol{B},m)$ を有限加法的測度空間とする．

1)　${}^*X$ から ${}^*\boldsymbol{R}^+$ への台が＊有限な函数 φ が存在し，任意の $A\in\boldsymbol{B}$ に対して $m(A)\fallingdotseq {}^*m_\varphi({}^*A)={}^*T_\varphi(\delta_{{}^*A})={}^*\sum_{\xi^*\in{}^*A}\varphi(\xi)$ となる．

2)　すなわち，任意の有限加法的測度は，${}^*\mathscr{P}({}^*X)$ 上の無制限に加法的な＊測度によって無限に近似される．

3)　$A\subset X$ に対して $\tilde{m}_\varphi(A)=\mathrm{st}[{}^*m_\varphi({}^*A)]$ と置けば，$\tilde{m}_\varphi$ は $\mathscr{P}(X)$ 上の有限加法的測度で，$A\in\boldsymbol{B}$ に対しては $\tilde{m}_\varphi(A)=m(A)$．しかし，$m$ が可算加法的であっても，$\tilde{m}_\varphi$ は可算加法的とは限らない．

証明　1)　X 上の正値な可測階段函数（可積とは限らない）の全体を E とする．E の任意の元 $f=\sum_{j=1}^{p}a_jd_{A_j}$ $(a_j\in\boldsymbol{R}^+,\ \ A_j\in\boldsymbol{B})$ に対して $P(f)=\sum_{j=1}^{p}a_j\cdot m(A_j)$ と置いて定理 5.2.4 を適用すればよい．

2), 3) は明らか．▮

無 原 子 測 度

5.2.12　定義　$(X,\boldsymbol{B},m)$ を〘有限加法的〙測度空間とする．X の有限部分集合 A が可測ならば必ず $m(A)=0$ であるとき，m を**無原子〘有限加法的〙測度**と言う．

5.2.13　補題　$(X,\boldsymbol{B},m)$ を無原子測度空間とする．$\boldsymbol{R}^+$ に値を取る可測函数の全体を E，とくに可積な函数の全体を E_P とする．$f_1,\cdots,f_l$ を E_P の元，$f_{l+1},\cdots,f_n$ を $E-E_P$ の元とし，e を正 (>0) の実数，Nを自然数とする．このとき，X の有限部分集合 C および自然数 r が存在し，

$$1\leqq i\leqq l\quad \text{なら}\quad |T_{C,r}(f_i)-P(f_i)|\leqq e.$$
$$l+1\leqq i\leqq n\quad \text{なら}\quad T_{C,r}(f_i)\geqq N$$

となる．ただし，$P(f_i)=\int f_i dm$, $T_{C,r}(f_i)=\frac{1}{r}\sum_{x\in C} f_i(x)$.

証明 $e\leqslant 1$, $N\geqslant 1$ とする．

1° 積分の定義により， $i\leqslant l$ なら可積な階段函数 g_i で， $0\leqslant g_i\leqslant f_i$, $P(f_i)-P(g_i)<\frac{1}{4}e$ なるものが存在する．また，$i>l$ なら可積な階段函数 g_i で，$0\leqslant g_i\leqslant f_i$, $P(g_i)>2N$ なるものが存在する．

$G=\max\{g_i(x)\,;\,1\leqslant i\leqslant n,\ x\in X\}$ と置き，g_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ の台全部の合併を Y とする．$m(Y)<+\infty$.

2° Y の可測部分集合 Z をうまく取ると，$m(Y-Z)<\frac{1}{4G}e$ となり，しかも $f_1,\cdots,f_l$ は Z 上有界になる．実際，$f_0(x)=\max\{f_1(x),\cdots,f_l(x)\}$ と置き $k\in \boldsymbol{N}$ に対して $\bar{f}_k(x)=\begin{cases} f_0(x) & |f_0(x)|\leqslant k \text{ のとき} \\ 0 & |f_0(x)|>k \text{ のとき}\end{cases}$ と置く．すると，$\{\bar{f}_k\,;\,k\in \boldsymbol{N}\}$ は可積函数の増大列で，f_0 に単純収束する．$Y_k=\{x\in Y\,;\,f_0(x)\leqslant k\}$ と置くと，Y_k は可測集合の増大列で，$\bigcup_{k\in \boldsymbol{N}} Y_k=Y$ となる．したがって，十分大きな k に対して $m(Y-Y_k)<\frac{1}{4G}e$ となる．もちろん $f_i(1\leqslant i\leqslant l)$ は Y_k 上有界である．

3° $i\leqslant l$ に対し，$f_i'(x)=\begin{cases} f_i(x) & x\in Z \text{ のとき} \\ 0 & x\notin Z \text{ のとき}\end{cases}$ と置く．$f_1',\cdots,f_l'$ は有界だから階段函数によって下から一様に近似される．すなわち，階段函数 $h_1,\cdots,h_l$ が存在し，$0\leqslant h_j\leqslant f_i'$, $f_i'(x)-h_i(x)<\frac{1}{4\cdot m(Y)}e$ $(x\in X)$ となる．Z 上 $g_i\leqslant f_i'$ だから，$x\in Z$ に対しては $g_i(x)\leqslant h_i(x)$ が成りたつように h_i を取ることができる．

$i>l$ に対しては $h_i(x)=\begin{cases} g_i(x) & x\in Z \text{ のとき} \\ 0 & x\notin Z \text{ のとき}\end{cases}$ と置く．

4° Z の可測部分集合の無共分有限族 $A_1,\cdots,A_p$ が存在し， $1\leqslant i\leqslant n$ に対して $h_i=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}d_{A_j}$ $(a_{ij}\geqslant 0)$ と書ける．d_{A_j} は A_j の特性函数である．$a_0=\max\left\{\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\,;\,1\leqslant i\leqslant n\right\}$ と置く．$m(A_j)$ はすべて有限だから， これらを

有理数で下から近似して通分する．すなわち，　自然数 $r, q_1, \cdots, q_p$ が存在し，$\frac{q_j}{r} \leqslant m(A_j) \leqslant \frac{q_j}{r} + \frac{1}{4a_0}e$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ となる．$q = q_1 + \cdots + q_p$ とすると，$\frac{q}{r} \leqslant \sum_{j=1}^{p} \frac{q_j}{r} \leqslant \sum_{j=1}^{p} m(A_j) \leqslant m(Y)$ が成立つ．

5°　各 A_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ から q_j 個の点を取る．$m(A_j)=0$ なら $q_j=0$ だし，$m(A_j)>0$ なら仮定によって A_j は無限集合だから何個でも取れる．その全部を集めて C とする．$1 \leqslant i \leqslant n$ に対し，

$$T_{C,r}(h_j) = \frac{1}{r} \sum_{x \in C} h_i(x) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{x \in C \cap A_j} h_i(x) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} q_j.$$

一方，$P(h_i) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} m(A_j)$ だから，

$$|T_{C,r}(h_i) - P(h_i)| = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} \left| \frac{q_j}{r} - m(A_j) \right| \leqslant a_0 \cdot \frac{1}{4a_0} e = \frac{1}{4} e.$$

6°　$1 \leqslant i \leqslant l$ に対し，

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant P(f_i) - P(h_i) = (P(f_i) - P(g_i)) + (P(g_i) - P(h_i)) \\ &= \frac{1}{4}e + \int_Z (g_i - h_i)\,dm + \int_{Y-Z} g_i\,dm \leqslant \frac{1}{4}e + \int_{Y-Z} g_i\,dm \leqslant \frac{1}{4}e + G \cdot m(Y-Z) \\ &\leqslant \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}e = \frac{1}{2}e. \end{aligned}$$

一方，

$$0 \leqslant T_{C,r}(f_i) - T_{C,r}(h_i) = \frac{1}{r} \sum_{x \in C} (f_i'(x) - h_i(x)) \leqslant \frac{q}{r} \cdot \frac{1}{4 \cdot m(Y)} e \leqslant \frac{1}{4} e$$

だから，$|T_{C,r}(f_i) - P(f_i)| \leqslant \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}e + \frac{1}{2}e = e$ となる．

7°　$i > l$ に対し，

$$\begin{aligned} T_{C,r}(f_i) &\geqslant T_{C,r}(g_i) = T_{C,r}(h_i) \geqslant P(h_i) - \frac{1}{4}e \\ &= P(g_i) - \int_{Y-Z} g_i\,dm - \frac{1}{4}e \\ &\geqslant 2N - G \cdot m(Y-Z) - \frac{1}{4}e = 2N - \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e \geqslant N. \ \blacksquare \end{aligned}$$

5.2.14 定理　$(X, \boldsymbol{B}, m)$ を無原子測度空間とする．$^*X$ の$*$有限部分集合 Γ および超自然数 ρ が存在し，可測で積分確定な任意の函数 $f: X \to \boldsymbol{R}$ に対して

$$\int_X f\,dm \fallingdotseq {}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f) = \frac{1}{\rho} {}^*\sum_{\xi {}^*\in \Gamma} {}^*f(\xi)$$

が成立つ．

証明　補題の記号を使って，$\mathscr{L}$ の二変項論理式 $\phi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ として，

$\mathrm{x} = (f, e, \boldsymbol{N}) \in E \times \boldsymbol{R}^{++} \times \boldsymbol{N} \wedge \mathrm{y} = (C, r) \in \mathscr{S}(X) \times \boldsymbol{N} \wedge$

$[f \in E_P \to |P(f) - T_{C,r}(f)| \leqslant e] \wedge [f \in E - E_P \to T_{C,r}(f) \geqslant N]$

を取って共起性の原理を使えばよい．ただし，$\mathscr{S}(X)$ は X の有限部分集合の全体である．▮

5.2.15 定理　$(X, \boldsymbol{B}, m)$ を無原子有限加法的測度空間とする．$^*X$ の$*$有限部分集合 Γ および超自然数 ρ が存在し，任意の $A \in \boldsymbol{B}$ に対して

$$m(A) \fallingdotseq {}^*m_{\Gamma,\rho}({}^*A) = {}^*T_{\Gamma,\rho}(\delta_{{}^*A}) = \frac{1}{\rho} {}^*|{}^*A \cap \Gamma|$$

が成立つ．

証明　補題 5.2.13 において，とくに $f_1, \cdots, f_n$ を階段函数（$i \leqslant l$ なら f_i は可積，$i > l$ なら非可積）に取ればよい．▮

5.2.16 系　定理 5.2.14〚5.2.15〛で，m が確率〚有限加法的〛測度，すなわち $m(X)=1$ ならば，$\rho = {}^*|\Gamma|$ に取れる．すなわち，${}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f)$ は ${}^*f$ の Γ 上での平均値である．

証明　$\gamma = {}^*|\Gamma|$ とすると，$\dfrac{\gamma}{\rho} = \dfrac{1}{\rho} {}^*|\Gamma| = {}^*m_{\Gamma,\rho}({}^*X) \fallingdotseq m(X) = 1$．一方，$|{}^*T_{\Gamma,\gamma}({}^*f) - {}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f)| = {}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f)\left|\dfrac{\rho}{\gamma} - 1\right|$．したがって，$f \in E_P$ なら ${}^*T_{\Gamma,\gamma}({}^*f) \fallingdotseq {}^*T_{\Gamma,\rho}({}^*f) \fallingdotseq P(f)$．$f \in E - E_P$ なら ${}^*T_{\Gamma,\gamma}({}^*f) \fallingdotseq +\infty = P(f)$．▮

5.2.17 例　普通の理論では，ある事象の確率が 0 だということとその事象が絶対に起らないということとは同じでない．　我々の $*$ 測度 ${}^*m_\Gamma$：${}^*m_\Gamma(A) = \dfrac{{}^*|{}^*A {}^*\cap \Gamma|}{{}^*|\Gamma|}$ $(A \subset X)$ は，ある意味で理論と感覚とのこのよ

うなギャップを埋める．たとえば，まわっている輪に向って矢を射るとき，それが指定された一点に当る確率は 0 である．

しかし，$^*m_\Gamma$ で測れば，それは $\dfrac{1}{^*|\Gamma|}$ という，0 でない無限小超有理数になる（例 2.5.15 も見よ）．ただし，練習問題 1 により，$X\subset\hat{\Gamma}$ としておく．

練 習 問 題

1. 定義 5.1.2 の記号のもとで，$\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$，W は $\boldsymbol{K}$ 上の $\{0\}$ でないハウスドルフ位相線型空間とする．このとき，$^*F$ の＊元 φ を適当に取ると，φ の台が X を含み，しかもあらゆる $f\in E$ に対して $^*T_\varphi(f)\fallingdotseq P(f)$ が成りたつようにできる．とくに V が $\boldsymbol{K}$ 上のハウスドルフ局所凸空間なら φ は $^*\mathscr{F}$ の＊元に取れる．同様に，以後のすべての定理で，結果として得られる φ の台や＊有限集合 Γ は X を含むように取れる．
2. X を孤立点のないハウスドルフ空間，E を X 上の実数値連続函数から成る線型空間，P を E 上の線型形式とする．このとき，$^*X$ の＊有限部分集合 Γ^+,Γ^- で $\Gamma^+\,{}^*\!\cap\Gamma^-={}^*\varnothing$ なるものおよび超自然数 ρ が存在し，任意の $f\in E$ に対して

$$P(f)\fallingdotseq\frac{1}{\rho}{}^*\!\!\sum_{\xi\in\Gamma^+}{}^*f(\xi)-\frac{1}{\rho}{}^*\!\!\sum_{\xi\in\Gamma^-}{}^*f(\xi)$$

が成りたつ．

付録 I　善良超フィルターの存在証明

善良超フィルターの存在定理 **3.3.6** を証明する．これははじめ一般連続体仮説を仮定して証明され†，のちにこの仮定なしで証明された‡．ここに載せる証明は Chang & Keisler [7] にあるものを，私なりに分りやすく書き直したものである．

本文ではなるべく素朴な立場を守ってきたが，ここだけは公理的集合論における順序数および基数の理論（ノイマンによる）を借用する．これによって叙述は著るしく簡潔になる．はじめにその諸定義と必要な諸結果とを列挙する．証明は付けない．これは大抵の公理的集合論の本†† に出ているし，[9] の冒頭にも簡単な要約がある．

§1　順序数および基数の理論（要約）

A.1.1　定義　集合 α がつぎの二条件をみたすとき，α を**順序数** (ordinal number) と言う：

a)　α は推移的である．すなわち，$\beta\in\alpha$ なら $\beta\subset\alpha$.

b)　α 上の二項関係 $\in$ は，α 上の整列順序関係である‡‡.

A.1.2　α, β が順序数なら，$\alpha\in\beta$, $\alpha=\beta$, $\beta\in\alpha$ のうちの一つが成立つ．今後 $\alpha\in\beta$ を $\alpha<\beta$ とも書く．$\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha\subsetneqq\beta$. 順序数の元は順序数である．順序数から成る空でない集合には最小元が存在する．

---

† H.J.Keisler : Good ideals in fields of sets, Ann. Math. **79** (1964) 338-359.

‡ K.Kunen : Ultrafilters and independent sets, Trans. Amer. Math. Soc. **172** (1972) 229-306.

†† たとえば Takeuti G. & W. M. Zaring : Introduction to axiomatic set theory. Springer (1971). Jech : Lectures in set theory. Springer Lecture Note **217** (1971).

‡‡ 順序の定義 **0.5.1** に正確に従えば，α 上の二項関係《$\beta=\gamma$ または $\beta\in\gamma$》が整列順序になる，ということである．

A. 1. 3（**超限帰納法**）　$P(\alpha)$ を順序数 α の性質とする．任意の順序数 β に対し，《あらゆる $\gamma<\beta$ に対して $P(\gamma)$ ならば $P(\beta)$》が成立つならば，あらゆる α に対して $P(\alpha)$ が成立つ．

A. 1. 4　順序数 α に対し，$\alpha\cup\{\alpha\}$ は順序数である．これを $\alpha+1$ と書き，α の**つぎの順序数**と言う．α がある順序数のつぎの順序数であるとき，α を**後続者順序数**と言う．そうでない順序数を**極限順序数**と言う．空集合は極限順序数である．空でない極限順序数が存在する（無限公理）．その中で最小のものを ω と書く．

A. 1. 5　空集合 $\varnothing$ を 0 と書く．$1=0+1=\{0\}$，$2=1+1=\{0,1\}$，…，$n=\{0,\cdots,n-1\}$，… と置く．$\omega=\{0,1,2,\cdots\}=\boldsymbol{N}$．$\omega$ の元を**有限順序数**または**自然数**，有限でない順序数を**超限順序数**という．ω は最小の超限順序数である．

A. 1. 6　$(\cdots((\alpha+1)+1)+\cdots+1)+1$（$n$ 回）を $\alpha+n$ と書く．α が極限順序数なら $\alpha=\bigcup\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\beta$．$\alpha$ が後続者順序数なら，極限順序数 λ および 0 でない有限順序数（自然数）n が唯一つずつ存在し，$\alpha=\lambda+n$ と書ける．n が奇数〖偶数〗のとき，α を**奇**〖**偶**〗**順序数**と言う．ある超限順序数 γ より小さい奇〖偶〗順序数の全体は γ と等濃である．

A. 1. 7　**定義**　α を順序数とする．α より小さいどの順序数とも α が等濃でない（双射が存在しない）とき，α を**基数**（cardinal number）と言う．基数は順序数である．有限順序数は基数である．これを**有限基数**または**自然数**，これ以外の基数を**無限基数**と言う．ω は最小の無限基数である．無限基数は極限順序数である．

A. 1. 8　任意の集合 A に対し，A と等濃な基数が唯一つ存在する．これを A の**濃度**と言い，$|A|$ と書く．α,β を基数とする．$(\alpha\times\{0\})\cup(\beta\times\{1\})$ の濃度を $\alpha+\beta$ と書く．$\alpha\times\beta$ の濃度を $\alpha\cdot\beta$ と書く．${}^{\beta}\alpha$（β から α への写像の全体）の濃度を α^{β} と書く．これらの演算に関する規則は **0. 6. 3** のとおりである．とくに $|\mathscr{P}(\alpha)|=2^{\alpha}$，$\alpha<2^{\alpha}$．$\alpha$ が順序数なら $|\alpha|\leqslant\alpha$．

A. 1. 9 基数αに対し，αより大きい基数の中で最小のもの（存在する）をαの**つぎの基数**と言い，α^+と書く．一般連続体仮説とは，任意の無限基数αに対して$\alpha^+=2^\alpha$が成りたつことを主張するものである．しかし，我々はこれに関知しない．基数αがある基数のつぎの基数であるとき，αを**後続者基数**と言う．そうでない基数を**極限基数**と言う．ωは0のつぎに小さい極限基数である．

A. 1. 10 αが基数，βが順序数で$\beta<\alpha$なら$|\beta|<\alpha$．したがって，αを無限基数，Xをαの部分集合で$|X|=\alpha$なるものとするとき，Xはαのいかなる切片にも含まれない．すなわち，αより小さい任意の順序数βに対し，$\beta<\gamma$なるXの元γが存在する．

A. 1. 11 αを無限基数，Xを2^αの部分集合とする．$|X|\leqslant\alpha$なら，Xは2^αのある切片に含まれる．すなわち，ある$\beta<2^\alpha$（$\beta\in 2^\alpha$のこと）を取ると，あらゆる$\gamma\in X$に対して$\gamma<\beta$となる．

§2 存在定理の証明

A. 2. 1 補題 αを無限基数，$|X|=\alpha$とし，Xの各元xに，濃度αの集合Y_xが対応しているとする．このとき，集合族$\{Z_x\,;\,x\in X\}$で，つぎの条件をみたすものが存在する：

a) $x\in X$なら$Z_x\subset Y_x$.

b) $x\in X$なら$|Z_x|=\alpha$.

c) $x, y\in X$, $x\neq y$なら$Z_x\cap Z_y=0$.

証明 補題は集合Xの素性とは関係ないから，$X=\alpha$としてよい．

1° **A. 1. 7**により，αは極限順序数である．α以下の順序数βに対し，

$$X_\beta=\{(\gamma,\delta)\,;\,\gamma\leqslant\delta<\beta\}$$

と置く．明らかに$|X_\beta|=\beta$であり，$\beta'\leqslant\beta$なら$X_{\beta'}\subset X_\beta$である．$\alpha$は極限順序数だから$X_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}X_\beta$.

2° X_αから$\bigcup_{\gamma<\alpha}Y_\gamma$への一対一写像$f$で，$(\gamma,\delta)\in X_\alpha$に対して$f(\gamma,\delta)\in Y_\gamma$となるものが存在する．

これを言うために，まず $\beta\in\alpha$（すなわち $\beta<\alpha$）に対し，一対一写像 f_β：$X_\beta\to\bigcup_{\gamma<\alpha}Y_\gamma$ の列 $\{f_\beta\}$ で上の条件をみたし，$f_\beta|X_{\beta'}=f_{\beta'}$ なるものを超限帰納法によって作る．これができたとすれば，$f=\bigcup_{\beta<\alpha}f_\beta$ と置けばよい．

$\beta=0$ なら $X_\beta=0$ だから，$f_\beta=0$ でよい．いま $\beta'<\beta$ なるあらゆる β' に対して $f_{\beta'}$ が定義されているとする．

イ）　β が後続者順序数，すなわち $\beta=\beta'+1$ のとき $\gamma<\beta'$ に対し，$Z_\gamma=\{f_{\beta'}(\gamma,\delta)\,;\,\gamma\leqslant\delta<\beta'\}$ と置くと，$Z_\gamma\subset Y_\gamma$ かつ $|Z_\gamma|=\beta'<\alpha$．よって $X_\beta-X_{\beta'}=\{(\gamma,\beta')\,;\,\gamma\leqslant\beta'\}$ から $Y_\gamma-Z_\gamma$ への一対一写像 φ が存在する．ここで $f_\beta=f_{\beta'}\cup\varphi:X_\beta\to Y_\gamma$ とすれば条件をみたす．

ロ）　β が極限順序数のとき．$f_\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}f_\gamma$ とすればよい．

3°　$\gamma<\alpha$ に対して $Z_\gamma=\{f(\gamma,\delta)\,;\,\gamma\leqslant\delta<\alpha\}$ と置けば補題の条件をみたす．実際，a) は明らかである．b) f は一対一，$|X_\alpha|=\alpha$ だから $|Z_\gamma|\geqslant|\alpha-\gamma|$ $(\alpha-\gamma=\{\delta\,;\,\gamma\leqslant\delta<\alpha\})$．$\alpha>|\gamma|$ だから $|Z_\gamma|\geqslant\alpha$．一方明らかに $|Z_\gamma|\leqslant\alpha$．よって $|Z_\gamma|=\alpha$．

c)　$\gamma_1\neq\gamma_2$ とする．$\xi\in Z_{\gamma_1}\cap Z_{\gamma_2}$ なら $\xi=f(\gamma_1,\delta_1)=f(\gamma_2,\delta_2)$．これは不可能である．∎

A.2.2　定義　　1)　α を無限基数とする．集合 α の，α 個の類への分割の全体を $\mathscr{U}(\alpha)$ と書く．

2)　$\mathscr{U}(\alpha)$ の空でない部分集合 Π と，α 上のフィルター $\mathscr{F}$ とが**同調する**とはつぎのことである：$\mathscr{F}$ の任意の元 X，Π の相異なる有限個の元 $P_1,\cdots,P_n$ および各 P_i の元 X_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ に対して $X\cap X_1\cap\cdots\cap X_n\neq0$．

3)　$\mathscr{P}(\alpha)$ の部分集合 E が有限交差的のとき，E の生成する α 上のフィルターを $\boldsymbol{F}(E)$ と書く．

注意　　Π と $\mathscr{F}$ とが同調するとき，$\mathscr{F}$ は超フィルターではない．実際，$\mathscr{F}$ を超フィルターと仮定する．$P\in\Pi$，$X,Y\in P$，$X\neq Y$ とすると $X\cap Y=0$．もし $X\in\mathscr{F}$ なら $Y\cap X=0$．$X\notin\mathscr{F}$ なら $\alpha-X\in\mathscr{F}$．よって $X\cap(\alpha-X)=0$．

A.2.3　補題　　α を無限基数，E を $\mathscr{P}(\alpha)$ の有限交差的部分集合で $|E|\leqslant\alpha$ なるものとする．$\mathscr{F}=\boldsymbol{F}(E)$ が α 上の一様フィルター（$\mathscr{F}$ の任意の元が

α と等濃）ならば，$\mathscr{U}(\alpha)$ の部分集合 Π で $\mathscr{F}$ と同調し，かつ $|\Pi|=2^\alpha$ なるものが存在する．

証明 1° E の有限個の元の共通部分の全体は，補題 **3.2.1** によって α 個以下だから，それを $\{J_\beta ; \beta<\alpha\}$ と列挙することができる（重複があるかもしれない）．$J_\beta \in \mathscr{F}$ であり，$\mathscr{F}$ は一様だから $|J_\beta|=\alpha$．したがって，補題 **A. 2. 1** により，集合の無共分族 $\{I_\beta ; \beta<\alpha\}$ で $|I_\beta|=\alpha$, $I_\beta \subset J_\beta$ なるものが存在する．そこで，α の有限部分集合 X と，$\mathscr{P}(X)$ から α への写像との対 (X, g) の全体を B とする．一つの X に対し，g の個数は $\alpha^{|\mathscr{P}(X)|}=\alpha$ だから，$|B|=\alpha \cdot \alpha=\alpha$ である．よって，各 $\beta<\alpha$ に対し，I_β から B への双射 φ_β が存在する．$\xi \in I_\beta$ に対し，B の元 $\varphi_\beta(\xi)$ を $(X_{\beta,\xi}, g_{\beta,\xi})$ と書く：各 β に対し，$B=\{(X_{\beta,\xi}, g_{\beta,\xi}) ; \xi \in I_\beta\}$．

$I_\beta \subset \alpha$ であり，任意の $\xi \in \alpha$ は イ） 唯一つの I_β に属するか，または ロ） どの I_β にも属さないかのどちらかである．だから，イ）のときは $\varphi(\xi)=\varphi_\beta(\xi)$．ロ）のときは勝手な β を取って $\varphi(\xi)=(X_{\beta,\xi}, g_{\beta,\xi})$ と置くと，α から B への上射 φ ができる．$\varphi(\xi)$ を (X_ξ, g_ξ) と書く．α の部分集合 J に対し，α から α への写像 f_J を，$\xi \in \alpha$ に対して，$\xi \in \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$ なら $f_J(\xi)=g_\xi(J \cap X_\xi)$, $\xi \notin \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$ なら 0 として定める．

2° 写像 $J \mapsto f_J$ は一対一である．したがって $|\{f_J ; J \subset \alpha\}|=2^\alpha$．

証明 $J_1 \neq J_2$ とする．$x \in J_1$, $x \notin J_2$ なる x があるとしてよい．$X=\{x\}$ とし，$g: \mathscr{P}(X) \to \alpha$ を，$g(0)=1$, $g(X)=0$ によって定める．(X, g) は B の元だから，ある $\xi \in \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$ によって，$(X, g)=(X_\xi, g_\xi)$ と書ける．$f_{J_1}(\xi)=g(J_1 \cap X)=g(X)=0$, $f_{J_2}(\xi)=g(J_2 \cap X)=g(0)=1$．すなわち $f_{J_1} \neq f_{J_2}$．

3° α の元 β, α の有限個の元 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$（重複があってもよい），および α の n 個の相異なる部分集合 $J_1, \cdots, J_n$ に対し，I_β の元 ξ で $f_{J_i}(\xi)=\gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ となるものが存在する．

証明 $\mathscr{S}(\alpha)$ の元 X で，$1 \leqslant i<j \leqslant n$ に対して $X \cap J_i \neq X \cap J_j$ なるものが存在する．$\mathscr{P}(X)$ から α への写像 g を，$g(J_i \cap X)=\gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ となるように取ることができる．すると $(X, g) \in B$．したがって I_β の元 ξ が存在し，$(X, g)=(X_\xi, g_\xi)$ となる．よって $f_{J_i}(\xi)=g_\xi(J_i \cap X_\xi)=g(J_i \cap X)=\gamma_i$．

4° α の部分集合 J に対して $P_J=\{f_J^{-1}(\gamma) ; \gamma<\alpha\}$．$\Pi=\{P_J ; J \subset \alpha\}$ と

置く．この Π が条件をみたすことを示す．

イ）　$\Pi\subset\mathscr{U}(\alpha)$. 実際，任意の $J\subset\alpha$ に対して $P_J\in\mathscr{U}(\alpha)$ ならよい．$f_J^{-1}(\gamma)\subset\alpha$. $\gamma_1\neq\gamma_2$ なら $f_J^{-1}(\gamma_1)\cap f_J^{-1}(\gamma_2)=0$. また，$\alpha$ の任意の元 ξ は $f_J^{-1}(f_J(\xi))$ に属する．よって P_J は α の分割である．$\gamma\mapsto f_J^{-1}(\gamma)$ は一対一だから $|P_J|=\alpha$. よって $P_J\in\mathscr{U}(\alpha)$.

ロ）　$|\Pi|=2^\alpha$. 実際，$J\mapsto P_J$ が一対一ならよい．$J_1\neq J_2$ なら $f_{J_1}\neq f_{J_2}$. よって，α のある元 η を取ると，$\gamma_1=f_{J_1}(\eta)\neq f_{J_2}(\eta)=\gamma_2$. $\eta\in f_{J_1}^{-1}(\gamma_1)$, $\eta\notin f_{J_2}^{-1}(\gamma_1)$. よって $f_{J_1}^{-1}(\gamma_1)\neq f_{J_2}^{-1}(\gamma_1)$. 一方，勝手な $\beta\in\alpha$ と $\gamma_1,\gamma_1,J_1,J_2$ に 3° の結果を使うと，I_β のある元 ξ に対して $f_{J_1}(\xi)=\gamma_1$, $f_{J_2}(\xi)=\gamma_1$ となる．$\xi\in f_{J_1}^{-1}(\gamma_1)\cap f_{J_2}^{-1}(\gamma_1)$ だから $f_{J_1}^{-1}(\gamma_1)\cap f_{J_2}^{-1}(\gamma_1)\neq 0$. ところが $f_{J_1}^{-1}(\gamma_1)\in P_{J_1}$ であり，P_{J_1} は分割だから，$f_{J_2}^{-1}(\gamma_1)\notin P_{J_1}$. よって $P_{J_1}\neq P_{J_2}$.

ハ）　同調性．X を F の元，$P_{J_1},\cdots,P_{J_n}$ を Π の相異なる元とし，$X_i\in P_{J_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ とする．各 i に対し，$\gamma_i<\alpha$ が存在し，$X_i=f_{J_i}^{-1}(\gamma_i)$ と書ける．$\mathscr{F}=\boldsymbol{F}(E)$ だから，ある $\beta<\alpha$ を取ると，$X\supset J_\beta$ が成立つ．ここで $\beta;\gamma_1,\cdots,\gamma_n;J_1,\cdots,J_n$ に 3° の結果を使うと，I_β のある元 ξ に対して $f_{J_i}(\xi)=\gamma_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ となる．$I_\beta\subset J_\beta\subset X$ だから，$\xi\in X\cap\bigcap_{i=1}^{n}f_{J_i}^{-1}(\gamma_i)$. ∎

A.2.4　補題　　α を無限基数，$\mathscr{F}$ を α 上のフィルター，Π を $\mathscr{U}(\alpha)$ の空でない部分集合で $\mathscr{F}$ と同調するものとし，J を α の任意の部分集合とする．このとき，つぎの二つの場合の一方が必ず起る：

a）　$\mathscr{F}\cup\{J\}$ は有限交差的で，Π と $\boldsymbol{F}(\mathscr{F}\cup\{J\})$ とは同調する．

b）　$\mathscr{F}\cup\{\alpha-J\}$ は有限交差的であり，さらに，Π の有限部分集合の補集合 Π' が存在し，Π' と $\boldsymbol{F}(\mathscr{F}\cup\{\alpha-J\})$ とが同調する．

証明　　a）の場合でないとすると，F の元 X, Π の相異なる元 $P_1,\cdots,P_n$ および $X_i\in P_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ を適当に取ることにより，

$$J\cap X\cap X_1\cap\cdots\cap X_n=0$$

となる．$\Pi'=\Pi-\{P_1,\cdots,P_n\}$ と置く．結論を得るためには，$\mathscr{F}$ の任意の元 Y, Π' の相異なる元 $Q_1,\cdots,Q_m$ および $Y_j\in Q_j$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ に対して

$$(\alpha-J)\cap Y\cap Y_1\cap\cdots\cap Y_m\neq 0$$

が成立つことを言えばよい．実際，Π と $\mathscr{F}$ とは同調し，$P_i\neq Q_j$ だから，

$$Y\cap X\cap X_1\cap\cdots\cap X_m\cap Y_1\cap\cdots\cap Y_m\neq 0$$

である．この左辺を書きかえると，

$$0\neq[J\cup(\alpha-J)]\cap Y\cap X\cap\bigcap_{i=1}^{n}X_i\cap\bigcap_{j=1}^{m}Y_j$$
$$=\left[J\cap Y\cap X\cap\bigcap_{i=1}^{n}X_i\cap\bigcap_{j=1}^{m}Y_j\right]\cup\left[(\alpha-J)\cap Y\cap X\cap\bigcap_{i=1}^{n}X_i\cap\bigcap_{j=1}^{m}Y_j\right]$$

となる．この第一項は0だから，第二項は0でない．▮

A.2.5 補題 αを無限基数，$\mathscr{F}$をα上のフィルター，Πを$\mathscr{U}(\alpha)$の空でない部分集合で$\mathscr{F}$と同調するものとし，fを$\mathscr{F}_0(\alpha)$（フレシェ・フィルター）から$\mathscr{F}$への増加写像とする．このとき，$\mathscr{F}$を含むフィルター$\mathscr{F}'$，Πの有限部分集合の補集合Π'で$\mathscr{F}'$と同調するもの，および$\mathscr{F}_0(\alpha)$から$\mathscr{F}'$への乗法写像hで$h\leqslant f$なるものが存在し，$\mathscr{F}'=\boldsymbol{F}(\mathscr{F},\mathscr{R}(h))$となる．ただし，$\mathscr{R}(h)$は$h$の値域$\{h(X)\,;\,X\in\mathscr{F}_0(\alpha)\}$である．

証明 1° Πの元Pを勝手に取る．$|P|=\alpha$だから，$P=\{A_\delta\,;\,\delta<\alpha\}$と列挙する（双射）ことができる．また，$|\mathscr{F}_0(\alpha)|=|\mathscr{S}(\alpha)|=\alpha$だから，$\mathscr{F}_0(\alpha)=\{B_\delta\,;\,\delta<\alpha\}$と列挙する．

$\delta<\alpha$に対し，$\mathscr{F}_0(\alpha)$から$\mathscr{P}(\alpha)$への写像h_δを，$X\in\mathscr{F}_0(\alpha)$に対して

$$h_\delta(X)=\begin{cases}f(B_\delta)\cap A_\delta & (X\supset B_\delta\text{ のとき})\\ 0 & (X\not\supset B_\delta\text{ のとき})\end{cases}$$

として定める．$X\supset B_\delta$なら$h_\delta(X)\subset f(B_\delta)$であり，$h_\delta(X)$は空でない（$\Pi$と$\mathscr{F}$とが同調し，$f(B_\delta)\in\mathscr{F}$，$A_\delta\in P$だから）．さらに，$h_\delta$は乗法的である．実際，もし$X_1\cap X_2\supset B_\delta$なら$X_1\supset B_\delta$，$X_2\supset B_\delta$だから，$h_\delta(X_1\cap X_2)=f(B_\delta)\cap A_\delta=h_\delta(X_1)=h_\delta(X_2)$．$X_1\cap X_2\not\supset B_\delta$なら$X_1\not\supset B_\delta$または$X_2\not\supset B_\delta$．よって$h_\delta(X_1\cap X_2)=0=h_\delta(X_1)\cap h_\delta(X_2)$．

2° さて，$\mathscr{F}_0(\alpha)$から$\mathscr{P}(\alpha)$への写像hを，$X\in\mathscr{F}_0(\alpha)$に対して$h(X)=\bigcup_{\delta<\alpha}h_\delta(X)$によって定める．まず，$h\leqslant f$．なぜなら，$h(X)=\bigcup_{\delta<\alpha}h_\delta(X)=\bigcup_{B_\delta\subset X}h_\delta(X)\subset\bigcup_{B_\delta\subset X}f(B_\delta)\subset f(X)$．つぎに$h$は乗法的である．実際，$h(X_1\cap X_2)=\bigcup_{\delta<\alpha}h_\delta(X_1\cap X_2)=\bigcup_{\delta<\alpha}[h_\delta(X_1)\cap h_\delta(X_2)]$．したがって$h(X_1\cap X_2)\subset h(X_1)\cap h(X_2)$．逆に$\xi\in h(X_1)\cap h(X_2)$なら，$i=1,2$として，$\xi\in\bigcup_{\delta<\alpha}h_\delta(X_i)$．よって$\delta_i<\alpha$が存在して$\xi\in h_{\delta_i}(X_i)$．当然$X_i\supset B_{\delta_i}$のはずだから$\xi\in A_{\delta_i}$．

だから $A_{\delta_1}\cap A_{\delta_2}\neq 0$. P は分割だから $\delta_1=\delta_2$. よって $\xi\in h_{\delta_1}(X_1)\cap h_{\delta_1}(X_2)=h_{\delta_1}(X_1\cap X_2)\subset h(X_1\cap X_2)$ となる.

3°　$\mathscr{F}\cup\mathscr{R}(h)$ は有限交差的である. 実際, $Y\in\mathscr{F}$, $h(X_1),\cdots,h(X_n)\in\mathscr{R}(h)$ とすると, $h(X_1)\cap\cdots\cap h(X_n)=h(X)$, $X=X_1\cap\cdots\cap X_n\in\mathscr{F}_0(\alpha)$. $X=B_\delta$ $(\delta<\alpha)$ と書けている. $h(X)\supset h_\delta(X)=f(B_\delta)\cap A_\delta$. $f(B_\delta)\in\mathscr{F}$, $A_\delta\in P$ だから, 仮定によって $Y\cap f(B_\delta)\cap A_\delta\neq 0$.

4°　$\mathscr{F}'=\boldsymbol{F}(\mathscr{F}\cup\mathscr{R}(h))$ と $\Pi'=\Pi-\{P\}$ とが同調することを示す. $\mathscr{F}$ の元 Y, $\mathscr{F}_0(\alpha)$ の元 X, Π' の相異なる元 $P_1,\cdots,P_n$ および $Y_i\in P_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ に対して, $Y\cap h(X)\cap\bigcap_{i=1}^{n}Y_i\neq 0$ を言えばよい. $X=B_\delta$ $(\delta<\alpha)$ と書けている. $h(X)\supset h_\delta(X)=f(B_\delta)\cap A_\delta$. $f(B_\delta)\in\mathscr{F}$, $A_\delta\in P$ だから, 仮定によって $Y\cap f(B_\delta)\cap A_\delta\cap\bigcap_{i=1}^{n}Y_i\neq 0$ となる. ∎

A. 2. 6　準備　　α を無限基数とする.

1)　α の部分集合 J とその補集合 $\alpha-J$ とから成る集合 $\{J,\alpha-J\}$ の全体を $L(\alpha)$ とする. $|L(\alpha)|=2^\alpha$ だから, $L(\alpha)=\{L_\eta=\{J_\eta,\alpha-J_\eta\}\ ;\ \eta<2^\alpha\}$ と列挙する（双射）ことができる. $\mathscr{F}$ が α 上のフィルターのとき, $L_\eta\cap\mathscr{F}\neq\varnothing$ は, J_η または $\alpha-J_\eta$ の一方が $\mathscr{F}$ に属することを意味する.

2)　$\mathscr{F}_0(\alpha)$ から $\mathscr{P}(\alpha)$ への増加写像の全体を $M(\alpha)$ とする. $|M(\alpha)|\leqslant(2^\alpha)^\alpha=2^\alpha$. 一方, 定値写像を考えれば $|M(\alpha)|\geqslant 2^\alpha$. したがって $M(\alpha)=\{f_\eta\ ;\ \eta<2^\alpha\}$ と列挙する（双射）ことができる.

3)　**A. 1. 6** により, 順序数は, 極限順序数, 奇順序数, 偶順序数の三つに分れる. 2^α より小さい奇順序数の全体を A, 偶順序数の全体を B と書く. $|A|=|B|=2^\alpha$.

A. 2. 7　補題　　準備 **A. 2. 6** の記号のもとで, 2^α より小さい順序数 ξ に対し, $\mathscr{U}(\alpha)$ の部分集合 Π_ξ および α 上のフィルター $\mathscr{F}_\xi$ で, つぎの条件をみたすものを構成する.

a)　Π_ξ と $\mathscr{F}_\xi$ とは同調する.

b)　$\eta\leqslant\xi$ なら $\Pi_\eta\supset\Pi_\xi$, $\mathscr{F}_\eta\subset\mathscr{F}_\xi$. $\xi\in A$ なら $\mathscr{F}_{\xi-1}\subsetneqq\mathscr{F}_\xi$.

c)　ξ が有限順序数なら $\Pi_0-\Pi_\xi$ は有限集合であり, ξ が超限順序数なら $|\Pi_0-\Pi_\xi|\leqslant|\xi|$ である. あらゆる ξ に対して $|\Pi_\xi|=2^\alpha$.

これと同時に，A から 2^α への写像 σ および B から 2^α への写像 τ を，つぎの二条件をみたすように構成する：

d) σ は単射で，$L_{\sigma(\xi)}\cap\mathscr{F}_\xi\neq\varnothing$. $\beta<\sigma(\xi)$ なら $L_\beta\cap\mathscr{F}_{\xi-1}\neq\varnothing$.

e) τ は単射で，$\mathscr{R}(f_{\tau(\xi)})\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$. $\beta<\tau(\xi)$ なら，ある偶順序数 $\zeta<\xi$ に対して $\beta=\tau(\zeta)$ となるか，または $\mathscr{R}(f_\beta)\not\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$ となる．さらに，$\xi\in B$ に対し，$\mathscr{F}_0(\alpha)$ から $\mathscr{F}_\xi$ への乗法写像 h で，$h\leqslant f_{\tau(\xi)}$ なるものが存在する．

証明　超限帰納法による．

1°　各 $n\in\omega$ に対して $K_n=\{(\xi,m)\,;\,\xi\in\alpha,\ \ n\leqslant m<\omega\}\subset\alpha\times\omega$ と置くと，$|K_n|=\alpha\cdot\omega=\alpha$, $K_n\supset K_{n+1}$, $\bigcap_{n\in\omega}K_n=0$ である．$|\alpha\times\omega|=\alpha$ だから，双射 $\varphi:\alpha\times\omega\to\alpha$ が存在する．$I_n=\varphi(K_n)$ と置くと，$I_n\subset\alpha$, $|I_n|=\alpha$, $I_n\supset I_{n+1}$, $\bigcap_{n\in\omega}I_n=0$.

$\mathscr{F}_0=\boldsymbol{F}(\{I_n\,;\,n\in\omega\})$ と置く．$\mathscr{F}_0$ は α 上の自由†で一様なフィルターである．補題 **A.2.3** により，$\mathscr{U}(\alpha)$ の部分集合 Π_0 で，$\mathscr{F}_0$ と同調し，$|\Pi_0|=2^\alpha$ なるものが存在する．これで Π_0 と $\mathscr{F}_0$ とが作れた．

2°　ξ が極限順序数のとき．$\Pi_\xi=\bigcap_{\eta<\xi}\Pi_\eta$, $\mathscr{F}_\xi=\bigcup_{\eta<\xi}\mathscr{F}_\eta$ と置く．$\Pi_\xi\subset\mathscr{U}(\alpha)$ および $\mathscr{F}_\xi$ がフィルターであることは明らかである．三条件を調べる．

a) X を $\mathscr{F}_\xi$ の元，$P_1,\cdots,P_n$ を Π_ξ の相異なる元とし，$X_i\in P_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ とする．ある $\eta<\xi$ に対して $X\in\mathscr{F}_\eta$ であり，Π_η と $\mathscr{F}_\eta$ とは同調するから，$X\cap\bigcap_{i=1}^{n}X_i\neq0$.

b) 明らか．

c) $\Pi_0-\Pi_\xi=\bigcup_{\eta<\xi}(\Pi_0-\Pi_\eta)$ と書ける．超限帰納法の仮定によって $|\Pi_0-\Pi_\xi|\leqslant\xi$ だから，$|\Pi_0-\Pi_\xi|\leqslant|\xi\times\xi|=|\xi|^2=|\xi|<2^\alpha$. したがって $|\Pi_\xi|=2^\alpha$.

3°　ξ が奇順序数のとき：$\xi=\lambda+2n+1$（λ は極限順序数，$n\in\omega$). $\sigma(\xi)=\min\{\eta\,;\,L_\eta\cap\mathscr{F}_{\xi-1}=\varnothing\}$ と置く．$\mathscr{F}_{\xi-1}$ は超フィルターではない（定義 **A.2.2** のあとの注意）から，このような L_η は存在する．$\Pi_{\xi-1}$, $\mathscr{F}_{\xi-1}$, $J_{\sigma(\xi)}$ に補題 **A.2.4** を適用する：$\Pi_{\xi-1}$ の部分集合 Π_ξ, α 上のフィルター $\mathscr{F}_\xi$ が存在し，$\Pi_{\xi-1}-\Pi_\xi$ は有限，したがって $|\Pi_\xi|=2^\alpha$, $\mathscr{F}_{\xi-1}\subsetneqq\mathscr{F}_\xi$, $L_{\sigma(\xi)}\cap\mathscr{F}_\xi\neq\varnothing$ となり，しかも Π_ξ と $\mathscr{F}_\xi$ とは同調する．これについて条件 a)〜d) を調べる．a), b) は

† いままで，《自由》という概念は超フィルターだけに定義されていたが，まったく同じ定義を任意のフィルターに適用する．

すでに分っているし，c) も簡単に分る．d) を示す．$\eta<\sigma(\xi)$ なら，$\sigma(\xi)$ の定義によって $L_\eta\cap\mathscr{F}_{\xi-1}\neq\emptyset$．また，$\eta<\xi$ なら $L_{\sigma(\eta)}\cap\mathscr{F}_\eta\neq\emptyset$ だから，$\sigma(\eta)\neq\sigma(\xi)$．

4°　ξ が偶順序数のとき：$\xi=\lambda+2n+2$（λ は極限順序数，$n\in\omega$）．$\tau(\xi)=\min\{\eta\,;\mathscr{R}(f_\eta)\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$，あらゆる偶順序数 $\beta<\xi$ に対して $\eta\neq\tau(\beta)\}$ と置く．まずこの存在を示す．$\xi'<\xi$，$\xi'\in B$ なら $\xi'<\xi-1$，$\xi-1\in A$．よって $\mathscr{F}_{\xi-2}\subsetneqq\mathscr{F}_{\xi-1}$．$\mathscr{R}(f_{\tau(\xi')})\subset\mathscr{F}_{\xi'-1}\subset\mathscr{F}_{\xi-2}$ だから，$Y_0\in\mathscr{F}_{\xi-1}-\mathscr{F}_{\xi-2}$ を取り，$\mathscr{F}_0(\alpha)$ のあらゆる元 X に対して $f(X)=Y_0$ と置く．$f\in M(\alpha)$ だから $f\in f_\eta$（$\eta<2^\alpha$）と書けている．$\mathscr{R}(f_\eta)\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$．一方 $\mathscr{R}(f_\eta)\not\subset\mathscr{F}_{\xi-2}$ だから，$\beta<\xi$ なら $\eta\neq\tau(\beta)$．よって $\tau(\xi)$ が定義された．$\Pi_{\xi-1}$，$\mathscr{F}_{\xi-1}$．$f_{\tau(\xi)}$ に補題 **A. 2. 5** を適用する：$\Pi_{\xi-1}$ の部分集合 Π_ξ, $\mathscr{F}_{\xi-1}$ を含む α 上のフィルター $\mathscr{F}_\xi$ および $\mathscr{F}_0(\alpha)$ から $\mathscr{F}_\xi$ への乗法写像 h が存在し，$\Pi_{\xi-1}-\Pi_\xi$ は有限（実際は 1），$|\Pi_\xi|=2^\alpha$ であり，Π_ξ と $\mathscr{F}_\xi$ とは同調し，$\mathscr{F}_\xi=\boldsymbol{F}(\mathscr{F}_{\xi-1},\mathscr{R}(h))$，　$h\leqslant f_{\tau(\xi)}$ となる．これについて条件を調べる．a), b) はすでに分っているし，c) もすぐ分る．e) を調べる．$\tau(\xi)$ の定義により，$\eta<\xi$ なら $\tau(\eta)\neq\tau(\xi)$，$\mathscr{R}(f_{\tau(\xi)})\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$．また，$\eta<\tau(\xi)$ なら，ある偶順序数 ζ に対して $\eta=\tau(\zeta)$ となるか，または，$\mathscr{R}(f_\eta)\not\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$ となる．

以上で超限帰納法による構成ができた．∎

A. 2. 8　定理の証明　与えられた無限集合の素性は定理と関係ないから，α を無限基数とし，α 上に善良超フィルターが存在することを言えばよい．前の補題で構成した $\{\mathscr{F}_\xi\,;\xi<2^\alpha\}$ を使って，$\mathscr{F}=\bigcup_{\xi<2^\alpha}\mathscr{F}_\xi$ と置く．

1°　$\mathscr{F}$ は明らかにフィルターである．また $\mathscr{F}_0$ の定義によって $\mathscr{F}$ は自由である．

2°　$\mathscr{F}$ は超フィルターである．実際，$|A|=2^\alpha$ であり，写像 $\sigma:A\longrightarrow 2^\alpha$ は単射である．だから，**A. 1. 10** により，$\{\sigma(\xi)\,;\xi\in A\}$ は 2^α のいかなる切片にも含まれない．すなわち，任意の $\eta<2^\alpha$ に対し，$\eta<\sigma(\xi)$ なる $\xi\in A$ が存在する．α の任意の部分集合 J に対し，$\{J,\alpha-J\}$ は L_η（$\eta<2^\alpha$）と書けている．$\eta<\sigma(\xi)$ なる ξ を取ると，σ の定義によって $L_\eta\cap\mathscr{F}_{\xi-1}\neq\emptyset$ となる．したがって $J\in\mathscr{F}$ または $\alpha-J\in\mathscr{F}$ が成立つ．

3° $\mathscr{F}$ は (α 級) 善良である．証明．$\mathscr{F}_0(\alpha)$ から $\mathscr{F}$ への増加写像 f が与えられたとする．$\mathscr{F}_0(\alpha)\ni X$ に対し，ある $\xi<2^\alpha$ を取ると $f(X)\in\mathscr{F}_\xi$．そこで $\xi(X)=\min\{\xi ; f(X)\in\mathscr{F}_\xi\}$ とし，$\mathscr{E}=\{\xi(X) ; X\in\mathscr{F}_0(\alpha)\}$ と置くと，$|\mathscr{E}|\leqslant|\mathscr{F}_0(\alpha)|=\alpha$, $\mathscr{E}\subset 2^\alpha$. したがって，**A. 1. 11** により，ある $\zeta<2^\alpha$ を取ると，あらゆる $\gamma\in\mathscr{E}$ に対して $\gamma\leqslant\zeta$ となる．すなわち，あらゆる $X\in\mathscr{F}_0(\alpha)$ に対して $\xi(X)\leqslant\zeta$. よって $f(X)\in\mathscr{F}_{\xi(X)}\subset\mathscr{F}_\zeta$. さて，$f$ は f_η ($\eta<2^\alpha$) と書けている：$\mathscr{R}(f_\eta)\subset\mathscr{F}_\zeta$.

B から 2^α への写像 $\rho:\xi\mapsto\min(\xi,\tau(\xi))$ は高々二対一だから $|B|=2^\alpha$. だから，**A. 1. 10** により，$\{\rho(\xi) ; \xi\in B\}$ は 2^α のいかなる切片にも含まれない．したがって，先に取りだした η,ζ に対し，ある $\xi\in B$ を取ると，$\eta<\rho(\xi)$, $\zeta<\rho(\xi)$ となる．とくに，$\zeta<\xi$, $\eta<\tau(\xi)$ が成立つ．$\eta<\xi$ だから $\mathscr{R}(f_\eta)\subset\mathscr{F}_\zeta\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$. 一方，$\eta<\tau(\xi)$ だから，$\mathscr{R}(f_\eta)\not\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$ であるか，または，ある $\beta<\xi$ によって $\eta=\tau(\beta)$ と書ける．いま $\mathscr{R}(f_\eta)\subset\mathscr{F}_{\xi-1}$ だから，ある $\beta<\xi$ が存在して $\eta=\tau(\beta)$. 補題 **A. 2. 7** の構成の条件 e) により，$\mathscr{F}_0(\alpha)$ から $\mathscr{F}_\beta$ への乗法写像 h が存在して $h\leqslant f_{\tau(\beta)}=f$ となる．よって $\mathscr{F}$ は α 級善良超フィルターである．∎

付録II　数学基礎論からの抜萃

廣瀬　健

形式的体系　第二章では宇宙Uに対して形式言語$\mathscr{L}$を構成し，論理式を定義した．論理式はその数学的理論における命題や述語を表わす形式的対象である．このような形式化は，命題や述語と呼ばれるものの範囲を明確にし，文の真偽が（超越的には）定め得るものであることを確認するために必要であった．

数学基礎論では，文の真偽が実際に決定できるか否か，つまり，証明可能性をも問題にする．この場合は“証明可能”についての厳密な定義が必要になり，推論規則や演繹を形式化することが必要になる．

形式言語$\mathscr{L}$の論理式で，その数学的理論の公理を書き表わしたものを$\mathscr{A}$，推論規則などの論理についての公理を書き表わしたものを$\mathscr{R}$とする．論理式は数学的理論に依存して定まるが，論理式から$\mathscr{R}$は数学的理論によらずに定められる．$\mathscr{R}$としては，たとえば，ヒルベルト・ベルナイスによるHB，ゲンツェンによるLKなどがよく知られている（前原昭二著『数理論理学』培風館，などを見よ）．$\mathscr{A}$と$\mathscr{R}$が定まれば，これから“演繹”を常識的な方法で定義することができ，公理と公理から演繹によって得られる論理式として，“証明可能な論理式”が定義できる．ϕが証明可能な論理式であるとき，$\vdash\phi$と書く．

$\mathscr{L}$と，$\mathscr{L}$で記述された（論理の公理をも含めた）公理系$\mathscr{A}$，$\mathscr{R}$をあわせたものを，（その数学的理論の）形式的体系と呼ぶ．

完全性と無矛盾性　論理式のある集合を$\mathscr{F}$とする．任意の文ϕに対して，$\phi\in\mathscr{F}$ または $\neg\phi\in\mathscr{F}$ であるとき，そのような$\mathscr{F}$を，完全である，という．ある形式的体系で証明可能な文の全体が完全であるとき，その形式的体系は完全であるといわれる．

$\mathscr{F}$に対して，$\phi\in\mathscr{F}$ かつ $\neg\phi\in\mathscr{F}$ となる論理式ϕが存在しないとき，$\mathscr{F}$は無矛盾である，という．ある形式的体系で証明可能な文の全体が無矛盾であるとき，その形式的体系は無矛盾であるといわれる．

不完全性定理　直観的には，任意の文 ϕ に対して，ϕ か $\neg\phi$ の一方は真であり，他方は偽である．形式的体系では，真である文 ϕ については $\vdash\phi$ であり偽な文 ϕ については $\vdash\neg\phi$ であることがのぞましい．すなわち，形式的体系は無矛盾であるばかりでなく，完全であることがのぞましい．

しかるに，“自然数論を含むような理論を形式化して得られる無矛盾な形式的体系は不完全である”ことが知られている．すなわち，自然数論をその内部で展開できるような形式的体系では，$\vdash\phi$ でもなく $\vdash\neg\phi$ でもないような文 ϕ を構成し得るというのである．この定理は，ゲーデルの不完全性定理と呼ばれている．

コンパクト性定理　“$\mathscr{F}$ を論理式のある集合とするとき，$\mathscr{F}$ の任意の有限部分集合が無矛盾ならば，$\mathscr{F}$ は無矛盾である”この逆は明らかに成り立つから，任意の有限部分集合が無矛盾であることは，$\mathscr{F}$ が無矛盾であることの必要充分条件になる．

モデル　$\mathscr{F}$ を文のある集合とする．$\mathscr{F}$ に対しある $\mathscr{L}$ 系 $\mathscr{M}$ が存在して，$\mathscr{F}$ の任意の文が $\mathscr{M}$ で真であるとき，$\mathscr{M}$ を $\mathscr{F}$ のモデルという．

$\mathscr{L}$ 系 $\mathscr{M}$ が形式的体系 $\mathscr{S}$ の公理系 $\mathscr{A}$ のモデルであるとき，$\mathscr{M}$ を形式的体系 $\mathscr{S}$ のモデルという．$\mathscr{M}$ が公理系 $\mathscr{A}$ のモデルならば，$\mathscr{M}$ は $\mathscr{S}$ で証明可能な文全体のモデルである．

自然数論を含む無矛盾な形式的体系で証明可能な文の全体を $\mathscr{F}$ とすれば，不完全性定理によって $\mathscr{F}$ は完全でない．したがって，$\mathscr{F}$ のモデル $\mathscr{M}$ で真となる文 ϕ で，$\mathscr{F}$ に属さないものが存在する．

第二章で定義したように，$\mathscr{F}$ を $\mathscr{U}$ で真になる文の全体とすれば，任意の文 ϕ は $\mathscr{U}$ で真あるいは偽となり，しかも ϕ が真となるのは $\neg\phi$ が偽のときであり，そのときに限るから，$\mathscr{F}$ は完全かつ無矛盾である．

完全性定理　モデルの理論においては，次の定理が最も基本的である：$\mathscr{F}$ を文のある集合とするとき，“$\mathscr{F}$ のモデルが存在すれば，$\mathscr{F}$ は無矛盾である”逆に，“$\mathscr{F}$ が無矛盾ならば，$\mathscr{F}$ のモデルが存在する”．

この定理は，ゲーデルの完全性定理と呼ばれている．完全性定理と呼ばれ

る所以は，この定理から論理の公理系（たとえば HB や LK）が完全なものであることが導びかれるからである．

この定理から，前述のコンパクト性定理は次のように述べられる：“$\mathscr{F}$ を論理式のある集合とするとき，$\mathscr{F}$ の任意の有限部分集合に対してそのモデルが存在すれば，$\mathscr{F}$ のモデルが存在する”．

以下では，自然数論を含む数学的理論のみを考える．

標準モデル　第二章におけるモデル $\mathscr{U}$ は，直観的な数学的理論そのものである．これと $\mathscr{L}$ 系として同型なモデルが標準モデルである．$\mathscr{M}$ を標準モデルとする．不完全性定理によれば，$\mathscr{M}$ をモデルにもつ完全な形式的体系は存在しない．すなわち，$\mathscr{M}$ をモデルにもつ証明可能な文の集合で完全なものは存在しない．もちろん，$\mathscr{M}$ をモデルにもつ証明可能な文の集合で不完全なものはいくらでも存在し得る．

形式的体系 $\mathscr{S}_0$ で証明可能な文の全体を $\mathscr{F}_0$ とし，そのモデルを $\mathscr{M}$ とする．$\mathscr{F}_0$ は不完全であるから，$\phi_1 \notin \mathscr{F}_0$ かつ $\neg\phi_1 \notin \mathscr{F}_0$ であるような文 ϕ_1 が存在する．ϕ_1 あるいは $\neg\phi_1$ のいずれか一方は $\mathscr{M}$ で真である．$\mathscr{S}_0$ の公理系 $\mathscr{A}_0$ に，$\mathscr{M}$ で真となる方の文を加えて $\mathscr{A}_1$ とし，新しい形式的体系 $\mathscr{S}_1$ を作る．$\mathscr{S}_1$ で証明可能な文の全体を $\mathscr{F}_1$ とする．ϕ_1，$\neg\phi_1$ はいずれも $\mathscr{S}_0$ で証明不可能な文であるから $\mathscr{F}_1$ は無矛盾であり，$\mathscr{A}_1$ は $\mathscr{A}_0$ に $\mathscr{M}$ で真となる文を加えたものであるから，$\mathscr{M}$ は $\mathscr{F}_1$ のモデルである．また，明らかに $\mathscr{F}_0 \subsetneqq \mathscr{F}_1$．この手続きをくり返せば，$\mathscr{F}_0 \subsetneqq \mathscr{F}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathscr{F}_k \subsetneqq \mathscr{F}_{k+1} \subsetneqq \cdots$ となるような，いずれも標準モデル $\mathscr{M}$ をもち，形式的体系 $\mathscr{S}_i$ $(i=1, 2, \cdots)$ で証明可能な文の全体 $\mathscr{F}_i$ が得られる．

超準モデル　議論を簡単かつ具体的にするために，自然数論とその形式的体系 $\mathscr{N}$ および，その標準モデル $\boldsymbol{N}$ を考える．c を定項とする．次のような文のリスト

$$(*)\quad \neg(\mathrm{c}=0),\ \neg(\mathrm{c}=1),\ \neg(\mathrm{c}=2),\ \cdots$$

を $\mathscr{N}$ の公理系につけ加え，新しい形式的体系 $^*\mathscr{N}$ を作る．$^*\mathscr{N}$ で証明可能な文の全体を $\mathscr{F}$ とする．

$\mathscr{F}$ の任意の有限部分集合は，定項 c を適当に（そこで現われる如何なる自

然数とも異なるように）解釈すれば，いずれも標準モデル $\boldsymbol{N}$ をモデルとしてもち，無矛盾である．よってコンパクト性定理により $\mathscr{T}$ も無矛盾である．すなわち，$\mathscr{N}$ が無矛盾であれば，$^*\mathscr{N}$ も無矛盾である．したがって，完全性定理によって $^*\mathscr{N}$ はモデルをもつ．しかし，$^*\mathscr{N}$ のモデルは標準モデル $\boldsymbol{N}$ ではあり得ない．

(*) は，次の (**) や (***) などに替えても，まったく同様に議論できる：

(**)　$0<\mathrm{c}$，$1<\mathrm{c}$，$2<\mathrm{c}$，…

(***)　$\exists x(2\cdot x=\mathrm{c})$，$\exists x(3\cdot x=\mathrm{c})$，$\exists x(4\cdot x=\mathrm{c})$，…

(**) における c は“無限大”に，(***) における c は“全ての自然数で割りきれる自然数”に解釈されることになる．

$^*\mathscr{N}$ のモデルは当然 $\mathscr{N}$ のモデルであるが，これら $^*\mathscr{N}$ のモデルは，いずれも超準モデルである．

自然数の範疇性など　スコーレムは“高々可算個の公理で，自然数の全体を特徴づけることは不可能である”ことを証明した．

上記の議論やこの定理は，自然数が範疇的であること，すなわち，“ペアノの公理によって定められる自然数の集合は，同型なものを除いて一意的に定まる”ことと矛盾するものではない．範疇性の証明は集合論のなかで行なわれる．すなわち，ペアノの公理に述べられている“集合”を直観的な意味での集合，すなわちモデルのなかでの集合と解釈したとき，はじめて範疇的であることが示されるのである．

付録III　討論：超準解析とは何か

倉田令二朗・広瀬健・齋藤正彦

齋藤　まず討論の進めかたについて合意を得たい．私のもくろみとしては，超準解析というものの意味を三つの面から考えたいと思う．

第一に数学研究において超準解析のもつ意味．これをさらに三つに分けたい．a）超準的な手法で《標準》数学を研究することがある意味ではやっているが，それは本当に有効か．もし有効だとすれば，どういう点で，なぜ有効なのか．b）基礎論の中で超準解析がとくにもつ意味があるか．あるとすればどんな点か．c）超準解析そのものの研究，とくにその枠組について．

第二に，超準解析には，大げさに言うと自然解釈の言語としての数学の拡大を目指す一面があると思う．その基礎には自然の表象としての実数の拡大があるのだが，もっと具体的に，たとえば場の量子論について倉田たちの研究があるので，そのことを聞きたい．また確率論，というより確率の概念についても問題があると思う．そのほかにも何かあれば話していただきたい．

第三として，超準解析はライプニッツ流の無限小解析を合理化し，それによって数学史の認識にインパクトを与えた．このことの意味を考えたい．これは大学の数学教育にも問題を投げかけている．

以上の三つに便宜上分けてみた．そのどれにも超準モデルの多意性の問題がある．大体こんな風にやりたいと思う（合意）．もちろんいくら脱線しても構わない．

相対性の認識

齋藤　さて，順序をまったく逆にして，第三の問題から入りたい．倉田は「数学論序説」の中で，ロビンソンがライプニッツ流の無限小解析を合理化したが，この試みには魅力を感じなかったと書いている．私はそれにも大いに興味をもったし，評価もしたいと思う．その理由として，しばらく大げさなことを言わせてもらう．御承知のように私は最近《文化の相対性》という観念に捉われていて，何でもその観点から見てしまう．そこで，文化の相対性は価値，認識，論理という三つの相に分けられると思う．価値というのは美的ないし倫理的価値のことだ．

倉田　価値というのはまず食いもののことだな．

齋藤　それももちろん含まれる．とにかく価値の相対性は，まともな思想家ならだれでも考えていることで，かなり一般的に理解されている．つぎに認識の相対性が問題だが，ごく小部分を除けば，認識は言語を通じてなされる．それが個別言語によって行われるから，それに必然的に伴うものがまずある．

倉田　個別言語というのは日本語と英語とが違うという意味か．

齋藤　そうだ．

広瀬　個人によって違うという意味ではない……

齋藤　個人ではない．言語自身が文化の本質の一部だからイタチごっこになるが，とにかくそういう相対性がある．もう一つの認識は自然科学で，それは普遍言語と称する数学を道具にしている．だから自然科学や技術の相対性の認識は非常に弱い．超準解析は数学の普遍性の神話を打破る方向にあると思うので，これが自然科学や，それを基礎として唯一つの支配文化になった現代技術文明を相対化して考える契機になるのではないかと期待するわけだ．三番目の論理の相対性は，いまのところ想像力が及ばず，具体的なことは何も言えない．

広瀬　普遍言語と自称する数学，という言いかたで言語というものを語ると，その普遍言語はロジックとどこが違うのか．

齋藤　普遍性に質的な違いがあるだろうと言っているのだ．かりに論理は普遍的だとしても，数学や自然科学は普遍的ではないのではないか，ということだ．

倉田　それにも拘らず，数学のあの形式だけを唯一つの普遍言語だとしていることを問題にしたいわけだな．

齋藤　そうだ．

無限小と ε-δ 論法

齋藤　ライプニッツが無限小解析を作ったわけだが，それは途中で厳密性を欠くとして批判された．厳密化の試みはいろいろあったが遂に成功せず，コーシーを経てワイヤストラス流の ε-δ 論法によって解析の基礎ができた．そのとおりだが，厳密でないということもやはり相対的な意味しかなく，要するに現代までの我々の立場から見てのことだと思う．

広瀬　そのとおりだ．コーシー・ワイヤストラス流でもある意味で曖昧さがある．それは，ライプニッツのようには対象がはっきりしないということだ．つまり無限小を一つの対象として捉えず，ダイナミックな過程として捉えている．そういうものとしては厳密になったが，無限小は個別の対象になっていない．ε-δ 自身が一つの対象になっていると思ってもよいが．要するにもの自体ではなく，それを捉える手続きをきちんとしたわけだ．

齋藤　それはそれとして一つの大発明だと思う．もの自体が捉えられないときには手続き自身を実体化するという，数学ではよくやる方法だ．

倉田　そのとおりだ．でき上った面から見れば，数学はそれがすべてだ．

齋藤　超準解析によれば無限小がそれ自身として合理化される．同じ文化の中で，同じ論理によりながらそういう別の基礎づけができたということはかなり意味のあることだと思う．現実に即して言うと，$\varepsilon-\delta$ が非常によいものであるのは確かだが，それを絶対化している面があると思う．とくに大学の数学教育で，$\varepsilon-\delta$ でなければ厳密でない，ということが多いが，それは反省しなければならない．$\varepsilon-\delta$ の評価については，厳密性だけでなく，証明などの手段として非常に強力だということ，またそれはなぜか，ということをもっとまじめに考え直す方がよいと思う．

微分形式による合理化

齋藤　もう一つ，dx，dy，d^ny 等の微分の合理化がある．一階の微分は微分形式として合理化されたが直観からは離れた．微分形式には《小さい》ということは全然ないのに，実際いじくるときには小さいものとして扱っている．超準解析が．一旦失われた直観性を回復したのは重要だと思う．

広瀬　微分形式の dx や dy は，頭の中では微小なものだが，微小なものだからと言って何かをすることはないのではないか．

齋藤　もちろんそうだ．本当は微小ではなく，別の空間でちゃんとした大きさを持っているのだから．

広瀬　そういう意味では一応終始一貫しているのではないか．

齋藤　だが本来は小さいものだった．合理化の代償としてイメージから離れたと言っているのだ．

倉田　それについては一刀斎（森毅氏）の意見がある．一刀斎は，グラスマン代数のあの微分形式は無限小のものではなく，無限小の法則化だと言っている．つまり局所線型化という法則性であって，やはり実体のかわりに機能を規定している．

シンタックスとセマンティックス

広瀬　$\varepsilon-\delta$ の場合も，心の中では ε はすごく小さいと思ってはいるが，実はいくら大きく取っても構わない．

倉田　教育の場合には，論理的には任意の ε なのに，必ず《どんなに小さい ε に対しても》と言う．

広瀬　これが $\varepsilon-\delta$ を分らなくさせる一つの理由だ．《どんなに小さい ε》と言ったり《任意の ε》と言ってみたり．ここをきちんと使い分けて教える方がよいと思う．任意の ε と言うときには，それがどんなに大きくても小さくても知ったことでない．これには相対的な意味しかない．ジャンケンポンみたいなものだ．

齋藤　あとだしすれば必ず勝てるということだな．

広瀬　そのとおり．ところが気持を説明しようとすると，任意なんだからいくらでも小さく取れる，というところにだけ意味がある．大きく取っても何の意味もない．つまり $\varepsilon-\delta$ も，言語で書いた場合にはもともとの気持を表現していない．やはり，数学におけるシンタックスとセマンティックスという二面性が現われているのだと思う．言語を純粋にシンタックスだと思えばある意味では辻褄が合うが，それで説明を通したのでは真意が伝えられず，したがって教育はできない．というのは，我々は数学をシンタックスではなくセマンティックスでやっているということだ． $\varepsilon-\delta$ で困惑している人はこういうことが分っていないのだと思う．

倉田　おそらく，かなり多くの人が逆の方を理解していないのだ．数学は外見的には完全にシンタックスなのだということが分れば，自分が実際に数学をやるときに，その心は常にセマンティックスによって衝き動かされているのだということが意識できるはずだ．

過程から実体へ

倉田　はじめの問題にまだ答えていないが，ライプニッツの無限小解析を合理化したことを私が否定的に評価したと言うけれども，あれはあまり考えたことがないというほどの意味であり，無限小のあありう捉えかた自身には非常に期待を持っている．たとえば無限小近傍とかモナドとかいうものが場の量子論の記述に果す役割について……

齋藤　結局，解析学自身のこととしては興味がないと言うのだろう．

倉田　歴史としてライプニッツがやったことを合理化して再現した．まず曖昧に捉えられた実体，つぎに曖昧さはないが機能的に捉えられた過程，最後に曖昧さなしに実体として捉えなおす，というサイクルとして見た場合には，ちょっと考え直してみたくならんでもない……

広瀬　ちょっと自己批判ぎみですな．

齋藤　そうだろう．現実に教育の面に影響を与え得るものでもある．実際に無限小で教育するのは，まだだれもやってないから，できるかどうか分らないが， $\varepsilon-\delta$ 式でやるにしても，別の合理化が可能だというだけで気分が違うと思う．たとえば，高校式の極限の定義は厳密でないから駄目だという言いかたはすべきでない．私は前からしていないが，今後ますますしないという自信がついた．無限小による教育も一度してみたいのだが……

広瀬　最後までやり通せるかどうか……

倉田　それについてどれだけの約束ごとをしておけばよいかが問題だ．

広瀬　$\varepsilon-\delta$ にも約束ごとは多い． 分りにくいのは約束ごとをさぼるせいだ．やはりカンティファイヤーの意味が分らないのだ，これがダイナミックなものだということが．任意の ε に対して δ があって，と言

うときにはδはεの函数だとか，一様性があればそうでないとかいう種類のことが分らないまま先に進まれて消耗してしまう．あれは形式に消耗するのだと思う．

実数とは何か

齋藤　いまの続きだが，実数というものを我々はほとんど実在するものと考えている．すなわち，自然の唯一つの表象として天から与えられたものと思っている．ところが超準解析のようなものが出てくると，それもアプリオリな根拠はなく，やはり経験的なものにすぎないということが分る．それなのにものすごく強い実在感を持っている．それは解析学の成功，それを基盤とする自然科学や現代技術文明の大成功という背景があるからだ．思弁的な立場からはアプリオリでないのだから，もう一度考えてみてもよいのではないか．見当違いかもしれないが，ある意味ではピタゴラス学派での自然の表象は有理数だったと言える．だからこそ無理量の議論が起きた．超実数というものも，少くとも論理的には整合的であることが分ったのだから，それを自然の表象と考えることはアプリオリには拒否されていない．あとはその効用によって評価するだけの話ではないか．

広瀬　複素数が現われたときと事情はあまり変らない．複素数も最初は何となく拒否されていたが，論理的には拒否できないもので，しかもものすごく役に立つものだから，みんな実在しているような気持になった．

齋藤　実際，ライプニッツは，無限小の量は$\sqrt{-2}$のような《理想概念》だと言っている．

倉田　表象の中に実在しているかのごとく，実数とかいろいろなものが現われているが，実はそうではないのだ，ということが今世紀に入っての数学基礎論の成果だ．文化の相対性というのは，ほかならぬ数学自身の一分科である数学基礎論の中で完膚なきまでに明らかにされた．それはゲーデルの完全性定理だ．厳密に言うと，論理に即しては完全性定理，モデルに即してはモデルの存在定理だ．ある公理によって規定される対象はまったく一意には決まらず，いくらでもある．

さらにスコレムの定理によれば，たとえば実数の性質を全部もちながら――全部というのは言葉の綾でちょっと留保条件が要るが――可算集合で実数の性質をもつものがある．しかももとの実数の部分集合として．ということは，心の中で確固たるものと思っていても，それをやっている数学者を外から，なかば結果論的に見た場合，まるっきり一意的に決まらない．だから実数の相対的性格より前に，数学の全部が，したがって表象の中にある実体というようなものが唯一絶対のものではないということは，今世紀前半で完全に明らかになったと言うことができる．

広瀬　そういう実数の性質が形式言語に

よって記述されるから，ということだな．

齋藤　完全に明らかにされたにしては私などには全然明らかでなかった．それは多分基礎論を知らないからだろうが，超実数体のように，本当に無限小がくっついた形で示されるのとは少し違うのではないか．

倉田　それは基礎論を知らないからではない．基礎論の達人である前原昭二先生も実数は二つある，一つはあのよく知られている実数，もう一つは形式主義的に公理化された実数論によって捉えられる実数だ，と言っている．

広瀬　それは実数論に限らない．ほとんどすべての数学的理論についてそうだ．

齋藤　私もそういう感じがする．しかし実数体の超冪としての超実数体は同じモデルの中にあるので，無限小も無限大も前原さんの言う《あの実数》に本当にくっついている．それは普通の数学者に与える印象として非常に違うと思う．

倉田　しかし虚心坦懐に成果を見れば，表象の中にある実数が絶対的な意味で天与のものではあり得ないことになっている．

齋藤　私もずいぶん聞かされたからそれは分る．だが私の言っていることは少し意味が違うと思う．

倉田　たしかに超冪による超準モデルは特別に可視的だという点に特徴がある．

広瀬　実数のイメージとしてはどうしても《あの実数》を思い浮かべる．そのくせかしこまってしゃべるときは《あの実数》ではなく，形式言語で書かれた実数を考えるのだ．

倉田　つまり断片的な実数の性質，その片言隻句が述べられているにすぎないというわけだ．

広瀬　片言隻句の寄せ集めだからやはり片言隻句にすぎないのであって，それが《あの実数》であるかどうか……

倉田　だからゲーデルやスコレムの偉大な定理は，意味するものと意味されるものとの結合の有名なあの恣意性から見れば驚くに当らない．しかも我々は有限の言語しか使えないのに《あの実数》は無限集合だということを考えると，それが捉えられないことの方がむしろ合理的ですらある．

だから，限定された実数の性質をすべて持ちながら《あの実数》と違ったものがあるということは，数学基礎論の延長線上では当然のことだ．具体的な構成は超積によったかもしれないが，セマンティックなレベルではヘンキンなどは知っていた．あらゆる数より大きい数があると仮定しても無矛盾だというスタイルでは知っていた．

齋藤　そういうすごい話ではなく，たとえば私のように《あの実数》しか知らない人でも，直線を思い浮かべるとき，その上にあの実数だけでなく，無限小がくっついていると思っても構わない，ということが分ったのだと思う．だから，形式言語で書かれる話とは違うところで一定の影響がありうるのではないかと言っているのだ．

広瀬　ライプニッツの頃の《あの実数》とコーシー以後の《あの実数》とは違うと

思う．《あの実数》というものは，その観念を形成するに至る教育過程にものすごく影響される．たとえばコーシー流の実数論の教育の結果，ヒューッと線になっていて両端がかすみの中に消えているようなイメージが形成されるのだと思う．ライプニッツがそういう実数のイメージを持っていたかどうか，かなり疑問だ．我々は，コーシー・ワイヤストラス流の《あの実数》の捉えかたにかなり毒されていると私は思う．

齋藤　まったくそうだ．

広瀬　いまの教育の体系の中では《あの実数》は一つに決まるかもしれないが，教育の仕方によっては全然違う《あの実数》になる可能性がある．

かりに違うイメージをもつ二人が話し合ったとして，話が食い違うかというと食い違わない．なぜなら，話し合うときには言語で表現されている実数についてしか語れないから．そこでお互いに納得できる．頭の中で思い浮かべているものは全然違うのに，全然違うものとして理解しながら《そうだ》と言うことになる．

倉田　ロジシャン同志が議論するときには《あの実数》を知っているくせにそれは横に置き，さっきの性質に関する片言隻句だけで議論するからこれも了解に達する．

齋藤　ちょっと違う話だが，超実数というものはいまのところ何の一意性もない．自然のモデルとして使うとき，これは問題なのではないか．一方《あの実数》はまったく一意的だ．

広瀬　我々が言語で書いた実数を実数だと思うといくらでも多様性がある．だが我々があの実数と呼んでいるものを，ある過程を過て実数だと思ったときにはユニークに決まってしまうということではないか．ひょっとすると，我々が思い込んでいるものは本当の自然界におけるあの実数として適当なものではないかもしれない．私はそういう過程で教育を受けてきたから，あの実数こそ本物だと思っているが，絶対にあれが自然の実数だと言い切れるかどうか．

齋藤　私もあの実数はユニークだと思っているが，それにモナドをくっつけるとすると，全然一意性がない．だからずいぶん実在性の強さが違うということがあるのではないか．

広瀬　実在性と言うが，これが実在だと思っているものは，要するにコーシー・ワイヤストラス流に毒されているせいではないかと言っているのだ．

齋藤　証明されるとか何とかいうことでは駄目で，《証明》しようと思った途端にあの実数でなくなってしまうというわけか．

広瀬　そうだ．

無限について

倉田　二つの実数が永久に分裂したままでいるわけだが，これが教育でどう機能するかは重大だ．

広瀬　我々の知っているあの実数は，個

体としての無限小とか無限大とかいう概念にはやはりそぐわない．

倉田　無限という課題について言えば，超準解析はやはり第三の道を与えている．超準解析の無限大の数というやつは，ガウスが《無限は生成のうちにしかない》と言ったあの生成する無限とも，またカントルの実無限ともまったく性質が違う．

齋藤　ロビンソンの本の第二版の序文にゲーデルの言葉が引用してあるが，ゲーデルも数系の拡大という観点から見ているらしい．実数ができてからこんなに長い間その先のもの，すなわち無限小や無限大の数ができなかったのは不思議だ，というようなことを言っている．

倉田　ゲーデルは超準解析を高く評価しているのか．

齋藤　あれで読むかぎり，とにかく評価はしていて，それをロビンソンがひどく喜んでいることは確かだ．

倉田　ゲーデルが何かを評価する場合，それはその効用性においてでは決してないのであって，この場合も実在性において高く評価しているのだろう，独自の実在論的観点から．

場の量子論

齋藤　自然解釈の言語としての数学の拡大という話に移ろう．倉田は超積を使ってくりこみ理論の合理化を試みたが，その話，それがその後どうなったか，それに対する物理学者の反応などを聞きたい．

倉田　確かにくりこみ理論は無限大の処理を含む．しかもそれは生成する無限大でもなく，カントル的意味での無限大でもない．実際，ある確定した無限大を足したり引いたりする．a も b も無限大で $a-b$ は有限，というのを取扱うのだからこれは超準解析に適応するだろう，と最初に言ったのが私だということは事実だ．十数年前のことである．ただ，その発想を宣言しただけで，そういう言明にとどまった．

齋藤　だが論文があるのだから実行もしたのだろう．

倉田　あの論文は言明に説明をつけた程度のものだ．あのときは大ざっぱに，（シュヴァルツの）超函数の積は定義されないのに，それをふんだんに用いるところから発散の困難が起ったのだと言い，だから超函数のかわりに何らかの超準的な函数を考えるべきだと言ったのだ．だがそれはかなり安易な態度なのであって，実は超函数論の内部で，積の問題が猛烈に考えられていた．ボゴリューボフ，パラジューク，ヘップ等，1956年以来のことだ．

何が問題かというと，むろん一般の超函数の積なんか問題になるわけないので，くりこみ理論で問題になるのは例の因果的グリーン函数と言われる超函数の積に限る．その特殊なタイプの超函数の積は超函数ではないが，基礎空間を制限すればその上では超函数になる，というような研究がずいぶんやられて立派な成果を挙げている．し

かしやはり，伝統的な乱暴なくりこみの操作がそのまま合理化される方がよい．それはあたかも機能的な無限小よりも，できればライプニッツそのままを再現する方がよいのと似ている．それには川端茂徳君を待たねばならなかった．川端君によって，くりこみ理論はおそらく非常に姿を変え，そこでは無限大が自動的に消えるという結果が得られそうだ．つまり，現われた無限大を物理的解釈によって事後的に消すのではなく，どっちにしても人間が消すのには違いないが，あたかも自然過程で消えるようなからくりを作りだすことができそうだ．これとは別の構想で部分的にはやられているが，もっと乱暴な計算をやっている物理学者に親しみやすい形で合理化されると思う．

つぎに，川端君のやっている NS^* 空間というのは実はもっと難かしい問題に関連して起きた．それは摂動計算によらない相互作用の理論だ．核子・中間子系のシュウィンガー方程式というのが1951年にある．これは函数空間上の積分や函数による微分を含むもので，ちょっといまの数学の枠に入らない．それをエドワーズとパイエルスがまったく定義ぬき，証明ぬきで解いた．そこは物理学者の天才的直観だが，川端君はそれを合理的に再構成した．結論としてパイエルスの結果が正しかったということがむしろ驚異的なのだが，我々の仲間はそこから出発したわけだ．

広瀬　パイエルスの仕事はいつごろか．

倉田　1955年．新しい試みへの意欲はその後の矮小化したときより，無限大の困難が現われた直後の方が多い．あらゆるものが爆発的に出ることがよくあるが，それだ．あとは諦めて矮小な狭いことだけに没頭することがあるので，パイエルスの仕事なんか，ほとんどだれもまともには顧みなかった．

そういうわけで，超準解析が必要になるのは過渡的なことかもしれない．途中で無限大が発生して消滅するのだから，無意味な無限大などが終始一貫出てこない理論が可能的ではあるだろう．

それにしてもくりこみ理論は，おそらく物理学史上，理論と実験とが極端によく合う稀な例だ．くりこみの精度を上げれば上げるほど合う．ところがくりこみ理論がやることは，物理的解釈で無限大をポンポン捨てることなのだ．普通は理論と実験とが合わなくて困るのだが，この場合は数学的には訳の分らぬことをしているのに，理論と実験とが果てしなく合うということに我々は困惑を感じるのだ．

《標準》　数学における超準解析の役割はあとで論じられるだろうが，過渡的にせよ超準理論でなければどうしようもない領域が場の量子論ではないか．まだ途中ではあるが，そんなに遠い将来でなく発表されると思う．今度は言明だけでなく，かなり手固いものだということをここで予言しておく．

経済，確率……

齋藤　ロビンソンは経済現象への応用というのを共著で書いている．

倉田　トムにせよロビンソンにせよ，外国人のほら吹きは必ず経済現象と言うな．

齋藤　経済では全部のファクターが有限なのに超準解析を使うのはどういうことかなと思ったが，たとえば一人の個人の行動はマクロな経済に影響を及ぼさない，だから無限小だというらしいのだが……

倉田　完全にライプニッツの哲学の再現ではないか．モナドか，我々は……

広瀬　だから個人が無限に何かをやる可能性があるわけだな．

齋藤　実はそれはおかしい．一つが無限小なら，それが十億集まっても無限小のはずなのだが……

確率論はどうだろう．

倉田　川端君の仕事は大体函数空間上の一様測度ということだから，確率論にも関係すると言ってよい．

齋藤　もっと素朴な話で，この本にもちょっと書いたが，宝くじの抽籤会みたいにまわっている輪に矢を射るとき，必ず輪に当るとしても，指定された一点に当る確率はゼロだ．これは少しおかしいところがある．ところが超準測度ではかると，0でない無限小の値がちゃんと出て，しかも全部合わせると1になる．

広瀬　あれは非常に納得しやすい．

齋藤　だから超準測度はかなりいい線を行っていると思う．数学の理論としてうまく行くかどうか分らないが，直観性を回復したことでとりあえず評価したい．

一般に，少しヘンな感じがすることはみんなそこで何かやる余地があるのではないか．筑摩の数学史の中に原亨吉氏が書いているが，むかし円とその接線とのなす角のことを一生懸命考えた人がいる．そういうものが無限小解析につながった．この種のことはほかにもいろいろあると思う．

形式論理の捨象したもの

齋藤　たとえば論理でも《AならばB》と《AでないかまたはB》とが同じだというのは中々納得できなかったし，いまでも抵抗を感じる．この二つを同じだとすることで，論理は何かかなりのものを捨象してしまったのではないか．

広瀬　この二つが同値だということは，いかに論理が単純にできているかという証拠だと思う．普通の言語では，《AならばB》を人が使うときには，必ずAは正しいか正しくないか分らないものについて言うので，分っていればそんなばかなことは言わない．一方《AでないかまたはB》の方はAがはっきり分っていて使ってもおかしくない．

倉田　直観主義論理ではその二つを区別する．古典論理では，否定をつければ and と or とは移り合うから同じ重要さしかも

たない．ところが，ゲーデル解釈というものがあり，直観主義論理をもう一度解釈する．またクリーネの帰納的実現可能性というのがあり，この二つとも共通に，and の解釈と or の解釈とが全然違う．and の方はだれが書いても同じだが，or の方は全然違って難かしい．子供は正直なので，論理が芽生えるとき，and より or の方を難かしく感じる．何となく感じが分るだろう．

齋藤　いや分らない．おとなになりすぎたからかな．

倉田　形式論理学を大いに発展させたストア学派にも現在の A or B はない．排他的な or しかない．

広瀬　子供に《AかつB》という条件で何かやれというと，必ずA，B両方がみたされるまで待つ．ところが《AまたはB》のときは，Aがみたされれば本当はもういいのだが，Bの結果が分るまで待つべきかどうか，これはかなり難かしい．

∀ がついている場合も同じだ．自然言語は数学ほどラフでないから，《すべて》と《任意》とを区別する．哲学でもそうだと思う．だが数学では同じだ．それは数学の証明ではどちらを証明しても同じだから，というただそれだけの理由によるのだ．

齋藤　私も文章を書くときはどっちを使うかずいぶん考える．

倉田　会津守君がこの本の原稿を批判したのはそれだ．序章の中に，《任意の何々について》と書いてあるところと何も書いてないところとがある，と言っている．

広瀬　それはその方がキメ細かい．

倉田　いや，キメ細かくない．厳密な区別なしにやっているから．自由変項と束縛変項との使い分けが曖昧だと私が言ったのはそういう意味だ．

広瀬　書くときの気持で《すべて》の場合と《任意》の場合とがあり，その気持を正確に伝えるという意味では統一すべきでない．たとえば私は，帰納法の説明をするときにはこの二つを完全に書き分ける．

倉田　我々ははっきり区別して了解しているからな．帰納法は

$$[\mathrm{P}(0)\wedge\forall n[\mathrm{P}(n)\rightarrow\mathrm{P}(n+1)]]\rightarrow\forall n[\mathrm{P}(n)]$$

と書くが，心の中では最初の ∀ は《任意》であり，あとの ∀ は《すべて》だ．この話はそもそも，何となくおかしいことは考えるに値するのではないか，ということから始まった……

広瀬　そうだ．数学というのは大変単純で，いろいろなものを捨象しているからキメが粗い．大概の場合，キメの粗いままで大丈夫だと思うが，キメを細かくすることによって何かがよく見えるようになる，ということはあり得ると思う．

倉田　かつて私は「確率論のもつ異様さについて」というのを書いたが，確率論には何かしら異様さがつきまとう．この問題提起は，小学校の先生から確率の授業に関連して受けたものだ．さっきの論理の話も子供の提起する部分が多い．数学は何ごとも単純化してはっきり書いてしまうので，

みんなおかしいと感じてもそのままになってしまう．だれもが感じながらはっきりしないことを顕在化すること，それがつねに教育の課題でもある．

手段としての有効性

齋藤　いよいよ数学研究における超準解析の話に移ろう．十数年来，超準解析を標準（standard）数学の研究に使うことがある意味ではやっている．ゲーデルの《未来の解析学》というお墨付もあるのだが，一方では本質的に新しい結果がないという否定的評価も多い．私もどちらかと言えばそれには否定的な気分なのだが……

広瀬　超準解析を使って標準数学の定理を証明する話をすると，必ずそれはスタンダードではできないのか，という質問が出る．これは，一つには超準解析を使って証明できたものは必ずそれを使わないでもできたという過去の実績による．もう一つ，超準解析を理解するためには少しは基礎論を勉強しなければならないが，それは面倒臭いということがある．どうしても必要なら勉強せざるを得ないが，なしでもすませられるものならすませたい．という気持が上の質問になって現われるのだと思う．そのとき私は，超準的にできるものは多分標準的にもできると思うが，証明できないから保留する，と答えることにしている．

齋藤　標準的にできるとかできないとかいうことはどういう意味か．超積はモデル理論とは無関係にできるし，それを使えばモデルの広大化に当るものができるのだから，この本の第一章で示したように，事実上超準解析を使ったのと同じことになる．だから正確には，論理を形式化して，この本の用語で言えば《モデル同値の原理》や《共起性の原理》を使うことをせずにすませられるか，ということだろう．

広瀬　そうだ．

倉田　モデルの初等拡大（elementary extension）ということだと思う．標準的問題は，はじめに超準的に解いた場合でも，結局は標準的にもできるだろうから，一種の消去定理が成りたつことになる．

広瀬　超準モデルを使うことによって，ものごとが見やすくなるということがあったのは確かだと思う．超準解析を使ってはじめて分ったことがいくつかあり，その後標準的にも証明されたとは言うものの，結果が正しいと分ってしまえばその証明はやさしくなる．成りたつか成りたたないかが数学者の主な苦しみなのであって，神様が《これは正しいのだ》と言ってくれさえすれば，かなり凡庸な数学者でも途端に証明できるものだ．

むしろ何故ものが見やすくなるかということの方に興味がある．何が超準解析を有用たらしめているかという議論は，実を言うと私は答えをもっておらず，よくは分らない．

倉田　たとえばコンパクト作用素の不変部分空間の問題を一般化したものは，まず

バーンステインとロビンソンが超準的に証明し，その直後に標準的証明ができたのだが，あのとき超準解析の何が決定的役割を果したかというと，やはりコンパクト空間の超準的特徴づけだと思う．つまり超準解析は標準解析の中で，これまでなかった新しい直観力を喚起する作用を果したと言うべきであろう．

ジーゲルの定理

倉田　ロビンソン・ロケットによるジーゲルの定理の証明およびそれに続くロビンソン・竹内の論文はどうだろう．

広瀬　ロビンソン・ロケットはジーゲルの定理の別証明をやったが，別証明そのものにはそれほど意味があるとは思えない．あるところでその話をしたとき，それは標準的証明より本当にやさしくなっているのか，と聞かれた．私がジーゲルの証明は読んでいないと言ったら，その人は，ジーゲルの証明はだれでも知っているが本当に読んだ人は少ない，と言って笑っていた．

とにかく，別証明ができたことよりも，彼等がなぜそれをやったかを考える方が意味があると思う．ベーカーの諸結果に見られるように，すべての解を見つけたいわけだ．ただ有限個だというのではものたりない．そのためには証明を眺めて，全部つかまえるにはどこを改善すればよいかを見つけたい．そのためにジーゲルの証明を全部チェックしてみよう，というのが別証明の動機だったのだろう．何が問題でどこを直せばよいかという種類のことは，超準モデルの方が分りやすい例がいっぱいあるのだから．

ロビンソン・ロケット・竹内をもう少し説明すると，ジーゲルの定理より歴史的に早いトゥエ（Thue）の定理というのがある．それは二変数で斉次なら解は有限個だという定理だ．ジーゲルの定理には斉次という条件がない．一方，ベーカーの結果は斉次ならちゃんと全部つかまえることができる，というものだ．ところがトゥエの定理はロスの定理から出る．ロスの定理は，任意の代数的実数を有理数で近似するものだ．しかし，そこでは近似できる有理数が有限個しかないというだけであり，それを実際に全部取ってくることはできない．それが遺伝して，トゥエの定理でも全部の解は求められない．

ところが，トゥエの定理に対応してベーカーの定理があって，そこでは全部取って来られる．だとするとロスの定理も改善の可能性がある．これは十分条件ではないけれども，勘としてはそうだ．ところで，もしロスの定理の有理数がエフェクティブに全部取れることが分れば，ジーゲルの定理の解も全部エフェクティブに取れる，というのがロビンソンの遺稿に基づいて竹内さんが書いた論文だ．こういう問題点をきちんと挙げて，ここさえ押さえれば大丈夫だということをやったのは超準的手法の偉大な成果だと思う．

最終的には超準モデルを使わずにすむかもしれないが，それだから存在価値がないのではなく，見やすければやはりよいわけで，それは大事なことだ．

倉田　それは場の量子論と同じだな．

広瀬　そうだ．ロスの定理は，$\kappa>2, \alpha$ を代数的実数とするとき，$\left|\alpha-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{y^{\kappa}}$ をみたす整数解 (x, y) が有限個しかないというものだ．ここでは κ は α によらないが，もし α によってもよければ，$|y|<C$ なる定数 C がエフェクティブに取れる，ということを一週間くらい前に足立恒雄君が見つけた．

実は足立君は超準モデルは一切使わず，ベーカーのテクニックを使ってやった．しかし，そこをやればよいという問題点を押さえるまでは超準的にやっている．こういうところは超準的手法で標準数学をやることの一つの大きなメリットだと思う．

倉田　動機づけの問題だな．やはり想像力の範囲を拡大したのだ．

有効性の本質は何か

広瀬　超準的にやると何故うまく行くのかということについて，よくは分らないが，いろいろの人の意見を聞いたり，自分でも考えてみて思いついたことを並べてみる．一番ドライな言いかたをすると，都合のいいものをくっつけて超準モデルを作るのだからうまく行くのは当り前じゃないか，ということがある．

倉田　それは数学の常套手段だ．

広瀬　もう一つ，広大化の場合に有限共起的な関係を考える．これは，有限個のときには何かで押さえられる．ところが，広大化すると無限個が一挙に押さえられる．これを論理式の段階で考えると，任意の何とかについて何かが存在する，という形をしていたものが，存在が前に出たということだ．つまり一様化である．一様化というのは数学の中で昔から限りなく役に立っている．言ってみれば，広大モデルの存在定理こそ，超準解析がなぜ役に立つかということそのものではないか．

齋藤　∀と∃との順序を変えることがエッセンシャルだというわけだな．

倉田　それはそうだ．まず何かが存在して万事うまく行く，というのならそれは神様だ．個々の場合について何かが存在するのなら，それは人間のことにすぎない．

広瀬　個々のものについて存在するというのはジャンケンポンだ．それに反して，存在が前にあるのはスペードのエースなのだ．その種のものは常に役に立ってきた．一様連続ならいろいろ強力なことが言えるというように．もう一つ，選択公理もそういうものだ．これは∀と∃とがひっくり返せるという公理なのだ．

倉田　一挙に取りだすという場合，選択函数の存在をはじめに言って，つぎの性質をみたす，ということになる．

広瀬　そうすると何故か役に立つ．それは無限にあるものを一言で言いきるという

強さだと思う．帰納法も同じたぐいの強さだ．

無限を枚挙的に扱う場合，対象を並べようとしても無限個あっては並べきれない．そこで並べてみせるのを諦めて，並べる方法を有限の言葉で書くというのが帰納法である．帰納法が成立する，という世界は，そのような方法が存在する，と言いきった世界だ．

論理式の形で言うと，存在が前に出る．リミットについても同じようなことが言える．リミット a が存在するときは《$\exists a\forall\cdots$》という式で書ける．論理的に同値ではあるけれども，$\forall$ で始まる行き先がありますよ，と言っているのとは少し違う．

齋藤　コーシー列と収束列の違いだな．

広瀬　そうだ．コーシー列から収束列，つまり《$\exists a\cdots$》が導けるところがコーシー列の強力なところなのだ．

倉田　その場合，定義するものを定義されるものの代用にする，すなわち完備化だな．

広瀬　だがコーシー列は手続きとして偉大なのであって，言明としては断然

《$\exists a\cdots$》

の形の方が強力で分りやすい．それこそは過程としてしか捉えられなかったリミットが実在として捉えられたということだ．最初は操作として捉えられる．それがものとして捉えられるというのは $\exists$ が前に出るということだと思う．

倉田　広大化というのは，論理に即して言えば $\exists$ が前に出るということ，伝統的な言いかたをすればそれは完備化だな．完備化は数学の歴史上，なぜか常に良いことであった．

齋藤　すると広大化というのは，個々の空間の完備化を考えるかわりに，はじめから論理の段階でそれに相当することをやっておくということだな．

広瀬　そうだ．最初からものがあれば，その分だけ手続きがさぼれるから見やすくなる．それが広大化によってものが見えやすくなる理由ではないか．

倉田　おそらくそれが，ゲーデルが超準解析を評価した理由でもあるだろう．あの人は実在論者だから．

齋藤　ハール測度の存在定理というのがあり，むかし読んだヴェイユの本の証明では，妙なところである函数空間を添字域とする実数の閉区間の族の直積を作り，そこにチホノフの定理を使う．これを読んだとき，選択公理のこういう使いかたもあるのだなと思って驚きもし，巧妙さに感心もした．しかし超準解析を使えば，この本にも書いたように，こういう不自然なことは何もせずに，ごく当り前に定理が証明できる．

倉田　天才的技巧的だったものがきわめて自然なものに移行したわけだ．

広瀬　対象化ということだが，素朴集合論が数学の中で有力なのも，その一番大きな理由は思考を対象化することができるからだと思う．何かをみたす，というだけで

はまだ述語であって対象になっていない.

倉田　論理の外延化ということだな．ブルバキは数学史の中で，よほど熟達した論理屋でも，現場の数学で外延の概念を使わずに論理だけでやろうとすると，否定のところで必ず躓く，と口をきわめて言っている.

広瀬　そうか．とにかく，対象が目の前に置けると議論がしやすくなる．超準モデルのよさは，リミットというような《関係》ではなく，《もの》が目の前に置けることにある．ほかにも意味があるかもしれないが，いまのところこれくらいしか分らない.

齋藤　しかし，大変よく分ったし，非常に面白かった.

倉田　私も感心した．分ったような気になった.

齋藤　やはりいいところがあるのだな．論文集を見ていると，あまりにもお手軽なやつがたくさんあって，超準解析も例によって論文製造のいい材料になっていると思い，あまりよい感じがしなかったのだが，いまの話でポジティブな面が大いにあることがよく分った.

標準理論とのずれ

齋藤　この本の第四章で，私は位相空間論を超準的に書き直してみせた．すると，もしはじめから超準解析でやったら，現存する位相空間論とは少しずれたところに理論の安定点みたいなものがあったのではないか，という感じをちょっと持った．もちろん標準理論をすべて超準的に書くことはできるが，ところによってはやや無理があるように思える．標準理論に合わせようとしなければ，それとほとんど同じ役割を果す理論がもっとすっきりできるのではないかという気がする．だから，書きかえ超準理論のでき具合の評価は，標準数学全体の構造に依存している．標準理論がすでにあるのだから，そこに超準理論が割りこんで同じものを作ろうとすれば，やや不利な面があるのではないか.

倉田　第四章の終りの方には超準的な世界の構築という志があるのではないのか．つまり，位相とは独立にモナドとフィルターとの双対性から出発するという……

齋藤　一応そう言えるかもしれない．私が参考にしたピュアリッツという人の論文によると，ショケが収束構造というものを考えていて，それは位相構造と少しずれがあるらしい．そうだとすると，超準解析はむしろそっちの方にぴったり合うのかもしれない.

倉田　それは聞き捨てならない.

齋藤　そうだ．自立性が大事にされた結果，数学は巨大かつ堅固な構造物になっている．もとはやはり自然解釈だとすると，そのもとをややおろそかにしたまま，自分の作った構造に合わせて自己増殖している一面がある．だから，いまから数学を作り直すのは不可能だが，もしかりに超準解析

だけが自立したとすれば，現存する数学とはすこしずれたものに発達したかもしれない．この辺にも《数学とは何か》という問題を再考する契機があるのではないかと思う．

橋渡しのメタセオレムを

広瀬　確かに，すでにあるものを別の方法で作ろうとすると損なことがいっぱいある．そこで，これからすべきことは，特に基礎論屋でない人がやってくれるといいのだが，超準と標準との間の掛橋をなるべくたくさん作ることだと思う．標準理論を超準的に書きかえるに際して，標準的証明を超準的証明に直す典型的なやりかたというのがある程度あるはずだ．だからメタセオレムがいくつか作れるに違いない．逆向きにもできるだろう．そういう代表的なものを幾つか用意しておけば，移しかえの手続きが大体カバーできるのではないか．そうすると，いざというときにはあっちの世界で仕事をしておいてパッと戻るということが可能になる．

倉田　それは応用数学に超準解析を使っている川端君もよく言っている．一旦宇宙の果てへ行って再び戻って来，こっちのことをもう一度宇宙の果てに返す，という往復運動が考えられると．

齋藤　どんなメタセオレムができるのか，見当もつかない．たとえば極限の書き直しから何を抽出するか……

広瀬　たとえばこの本の第四章は標準理論の書き直しだが，著者は標準の方をよく知っているからそれほど苦労しなかったと思う．ということは，形式化されてはいなくても，著者の頭の中にはすでにメタセオレムがいくつかあるということだ．その往復運動のメカニズムをメタセオレムの形に整理しておくと，人はそれぞれ自分の得意な世界で仕事をし，最初と最後だけ与えられた世界の言葉で書けばよいことになる．

自　然　数　論

齋藤　最後に基礎論内部の話に移ろう．

倉田　集合論と自然数論というものがある．狭い意味での基礎論の目標は，無矛盾性，独立性，証明不可能性等であったわけで，それは集合論の中で極度に発展した．ゲーデル，コーエン，ソロヴェイ，スコット等によってたくさんの基礎論固有の問題が解けた．ところが自然数論はおくれている．ヒルベルトが生きていたら嘆くに違いない，というのが私の持論だ．

つまり，自然数論における独立性や無矛盾性の問題に形式主義で結着をつけようというのが，ヒルベルトが形式主義を唱えた大きな動機の一つだったはずだ．だからヒルベルト・ベルナイスの本はほとんど自然数論である．ところが自然数論で無矛盾性や独立性を問題にしようとすると，たとえばフェルマはこの公理から証明できるのかとか，ゴールドバッハはどうかとかいうこ

とが伝統的にはもっとも重要な問題だと思うが，非常な困難を感じる．《あの実数》とは比較にならないほど，《あの自然数》は具合悪いくらい硬質だ．

しかしやはり超準的な自然数というのが考えられる．ところが私は，超積で得られるモデルは無矛盾性，独立性，証明不可能性の問題にはあまり役に立たないような気に段々なってきた．超積は，その標準的な部分を遺伝体質として強く持っている．フィルターをいろいろ取ることによって何かが成りたつモデルや成りたたないモデルを作ろうとしても，遺伝性が邪魔になってうまくできない．

では自然数論に超準モデルが役に立たないかというと，私は必ずしもそうは思わない．ごく矮小な形では若干の成果が挙がっている．ある公理からある定理が証明できないという，いまのところ他の手段ではできていないことが，矮小な超準モデルを使ってできたということがある．引続きそれをやろうとはしているのだが……

それはそれとして，今日の議論の大勢によって，むしろ標準数学の世界における超準数学の意義が，私が騒いでいた当時よりも偉大に思えてきた．

齋藤　私も最初やや否定的なことを言ったのに，結論はすごく肯定的なことになった……

広瀬　それにも拘らず，超準的にできることは多分標準的にもでるきだろうと私は思い続けている．

倉田　それは整数論の問題で，解析的に証明できるものは代数的にも証明できると思っているあの歴史の系譜と同じである．

実数論を

広瀬　超準解析が基礎論の中で意味をもつと私が思う理由は，いまの集合論と自然数論というまさにそのことに関連する．この二つは両極端で，むやみやたらに何でも取込んだ集合論があり，神秘的ではあるがひどくサッパリとした自然数論がある．ところが我々がやっているのは大抵そのまんなか辺だ．つまり，実数論ないしはその延長線上の理論である．多様体とか何とか言っても結局は実数論だと思う．基礎論ではまだこの辺の研究がほとんどない．もちろん，難かしいということもある．どのように定式化すればよいかさえ問題だ．

倉田　実数論というのはどうしても集合論より難かしくなってしまう．

広瀬　しかしそれをやらないと本物じゃない．ヒルベルトが嘆くということなら，まさしく実数論をやるべきだと思う．実数から出発したセオリーがかつて基礎論の中になかったかというと実はあった．それは解析的集合論だ．解析的集合論は実数を天与と思って，つまり《あの実数》から出発し，ある種の行詰りが起きた．

だから，超準的なやりかたでうまく行くかどうかは分らないが，超準的思考や手法もよい参考になるだろう．そして，実数に

対する認識がある程度集積されたときに，うまく定式化することができれば，基礎論の立場からの実数論へのよいアプローチが可能になると思う．これらの理論は，自然数論に対しても有効なはずだと思っている．私としては，実数論でのエフェクティヴィティみたいなものをフォーマルに展開し，それを用いて実数を定式化することを考えている．

広大モデルと飽和モデル

齋藤　最後に超準解析の場となるモデルの取りかたの話だが，広大モデルと飽和モデルとがある．ロビンソンの本以来，ほとんどみんな広大モデルでやっている．この本もそうだ．どうしてもできないときだけ飽和モデルをもってくる．だが私は実際にやってみて，はじめから飽和モデルを使う方がいいような気がしてきた．広大モデルでやっていると，一々標準世界に帰って有限的，組合せ論的レンマをやり，それを共起性の原理によって超準世界に戻すということをやらなければならない．ところが飽和モデルならそれ自身の中で共起性の原理が働くから，統一的自立的に超準理論が作れる．それにも拘らず人が広大モデルに固執するのはやはり親近性ということだろうか．

倉田　やがてみんな飽和モデルでやるようになるだろう．その都度拡大体を考えるかわりに，はじめから代数的閉体で考えるようなものだ．ことの筋としては，まずぎりぎりまで拡大しておいてからその部分拡大を考える，という風になって行くであろう．

広瀬　やはり最初のうちは標準の世界での目的があって，それを考えるためにはこうやる，という個々の目的意識がそういう形で現われるのではないか．

齋藤　どれだけ弱い条件でどれだけのことが言えるかという興味もある．

広瀬　ものができ上ってくると，最後に一般的な形で整理する人が現われるのだ．まだ整理する段階に至ってないからこういう風になっているのだろう．

（1976年7月23日，東京）

付録IV　増補　ローブ測度

本書で扱った超準測度論は，標準測度空間 $(X, \boldsymbol{B}, m)$ の上の積分を $^*X$ 上の重みつき超有限和で表わす，または無限小近似するというものだった．これに対し，P. ローブ [19] は，＊有限加法的＊測度空間から出発して，外的な可算加法的測度空間を構成し，確率論に新らしい道を開いた．その後の超準確率論の大発展はここに端を発する．以下，ローブ測度の構成法と基本的性質を解説する．

§1　ローブ測度の構成

枠組として，$^*\mathscr{U}$ は可算級飽和な広大モデルとする．可算級飽和性の仮定は本質的である．定理 **3.1.16** により，$^*\mathscr{U}$ ではつぎの点列の延長定理が成りたつ．

点列の延長定理　α, β を＊集合（$^*U$ の元），A を $\hat{\alpha}$ の可算部分集合（これは外的），F を A から $\hat{\beta}$ への写像（これも外的）とする．このとき，F は $\hat{\alpha}$ から $\hat{\beta}$ への内写像に延長される．すなわち，α から β への＊写像 φ が存在し，A の任意の元 ξ に対して $\varphi(\xi)=F(\xi)$ となる．

§5.2 と同様，$\boldsymbol{R}^+=\{x \in \boldsymbol{R}\,;\, x \geqslant 0\}$，$\boldsymbol{R}^{++}=\{x \in \boldsymbol{R}\,;\, x>0\}$，$\overline{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$，$\overline{\boldsymbol{R}}^+=\boldsymbol{R}^+ \cup \{+\infty\}$ とする．$\overline{\boldsymbol{R}}$ の順序位相に従い，正負の無限大超実数の標準部分は $+\infty, -\infty$ とする．

$\boldsymbol{X}=(X, \boldsymbol{A}, \nu)$ を＊有限加法的＊測度空間とする．$\boldsymbol{A}$ は $^*\mathscr{P}(X)$ の＊部分集合であり，$\hat{\boldsymbol{A}}$ の元は X の＊部分集合である．そこで，少し面倒くさいけれども，一般に $^*\mathscr{P}(X)$ の＊部分集合 $\boldsymbol{C}$ に対し，

$$\overset{\square}{\boldsymbol{C}}=\{\hat{\pi}\,;\,\pi \in \hat{\boldsymbol{C}}\}=\{\hat{\pi}\,;\,\pi^* \in \boldsymbol{C}\}$$

とおくことにする．すると，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ は $\hat{X}$ の内的部分集合から成る有限加法的集合環である．$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の元 $P=\hat{\pi}$ $(\pi^*\in \boldsymbol{A})$ に対し，$\overset{\square}{\pi}(P)=\nu(\pi)$，$\mu(P)=\mathrm{st}[\overset{\square}{\pi}(P)]=\mathrm{st}[\nu(\pi)]\in\overline{\boldsymbol{R}}^+$ とおくと，簡単にわかるように，$(\hat{X},\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\overset{\square}{\nu})$ は内的な有限加法的超測度空間であり，$(\hat{X},\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\mu)$ は（外的な）有限加法的測度空間である．

ローブの定理　$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ を含む最小の（外的な）可算加法的集合環を $\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ とするとき，$\mu:\overset{\square}{\boldsymbol{A}}\to\overline{\boldsymbol{R}}^+$ は $\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ 上の可算加法的測度に一意的に延長される．

以下，この定理を証明する．ただし，一意性は $\boldsymbol{X}$ が有限測度空間の場合 $(\mu(\hat{X})<+\infty)$ にだけ証明する．一般の場合の一意性については文献 [47] または [45] を見よ．我々の証明は $\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ を直接には扱わず，分りやすい構成法によって，$\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ を含む可算加法的な完備測度空間を作ってしまう．

$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の元 Γ で，$\mu(\Gamma)<+\infty$ なるものの全体を $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}{}^{fin}$ と書く．また，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}{}^{fin}$ の元 Γ に対し，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の元で Γ に含まれるものの全体を $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$ と書く．

$\boldsymbol{A}$ の＊元 γ で，$\nu(\gamma)$ が有限超実数であるものがあり，$\Gamma=\hat{\gamma}$ と書ける．γ の＊部分集合の全体を $\boldsymbol{A}_\gamma$ と書けば，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma=(\boldsymbol{A}_\gamma)^{\square}$ である（この繁雑さは我々の枠組の欠点と言える）．

B.1.1　定義　$\hat{X}$ の（一般に外的な）部分集合 A で，つぎの条件をみたすものの全体を $\boldsymbol{B}$ とする（これが可算加法的集合環になるはず）：任意の $\Gamma\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}{}^{fin}$ および任意の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}^{++}$ に対し，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$ の元 P,Q で，

$$P\subset A\cap\Gamma\subset Q,\quad \mu(Q-P)<\varepsilon$$

なるものが存在する．

B.1.2　補題　$\boldsymbol{B}$ は $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ を含む集合環である．

証明　1°　$A\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ のときは，$P=Q=A\cap\Gamma$ とおくことにより，$A\in\boldsymbol{B}$，すなわち $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}\subset\boldsymbol{B}$．

2°　$A\in\boldsymbol{B}$ とする．与えられた Γ,ε に対し，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$ の元 P,Q で，$P\subset A\cap\Gamma\subset Q$，$\mu(Q-P)<\varepsilon$ なるものが存在する．$\Gamma-Q\subset\Gamma-(A\cap\Gamma)\subset\Gamma-P$ が成りたち，まんなかのものは $(\hat{X}-A)\cap\Gamma$ に等しい．簡単に分るように，$\mu(\Gamma-P)$

$-\mu(\Gamma-Q)=\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$ だから，$\hat{X}-A\in \boldsymbol{B}$.

3° $A, B\in \boldsymbol{B}$ とする．与えられた Γ, ε に対し，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$ の元 P, Q, R, S で，$P\subset A\cap\Gamma\subset Q$, $R\subset B\cap\Gamma\subset S$, $\mu(Q-P)<\varepsilon$, $\mu(S-R)<\varepsilon$ なるものがある．$P\cup R$ も $Q\cup S$ も $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$ の元であり，$P\cup R\subset(A\cup B)\cap\Gamma\subset Q\cup S$ が成りたつ．さらに，$(Q\cup S)-(P\cup R)\subset(Q-P)\cup(S-R)$ だから，$\mu[(Q\cup S)-(P\cup R)]<2\varepsilon$ となり，$A\cup B\in \boldsymbol{B}$. ▮

B.1.3 定理 $\boldsymbol{B}$ は可算加法的集合環である．

証明 $\boldsymbol{B}$ の元の増加列 $\langle A_n\rangle_{n\in\boldsymbol{N}}$, $A_1\subset A_2\subset\cdots$ に対し，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ が $\boldsymbol{B}$ に属することを示せばよい．$\Gamma\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}{}^{fin}$, $\varepsilon\in\boldsymbol{R}^{++}$ とする．

1° 各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対し，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$ の元 P_n, Q_n で，$P_n\subset A_n\cap\Gamma\subset Q_n$, $\mu(Q_n-P_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$ なるものをとる．帰納的に $R_1=P_1$, $S_1=Q_1$, $R_n=R_{n-1}\cup P_n$, $S_n=S_{n-1}\cup Q_n$ とおくと，$R_n, S_n\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$. 列 $\langle R_n\rangle_{n\in\boldsymbol{N}}$, $\langle S_n\rangle_{n\in\boldsymbol{N}}$ はそれぞれ増加列で，$R_n\subset A_n\cap\Gamma\subset S_n$.

$$S_n-R_n\subset(S_{n-1}-R_{n-1})\cup(Q_n-P_n)$$

だから，帰納法により，任意の $n\in\boldsymbol{N}$ に対して

$$\mu(S_n-R_n)\leqslant\mu(S_{n-1}-R_{n-1})+\mu(Q_n-P_n)<\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$=\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)<\varepsilon \tag{1}$$

が成りたつ．

一方，$\langle\mu(R_n)\rangle$ も $\langle\mu(S_n)\rangle$ も有界な単調増加実数列であり，収束する．したがって，ある $n_1\in\boldsymbol{N}$ をとると，$n_1\leqslant n\leqslant m$ なる任意の自然数 n, m に対して $\mu(R_m)-\mu(R_n)<\varepsilon$, $\mu(S_m)-\mu(S_n)<\varepsilon$ が成りたつ．これと (1) とを合わせて，$n_1\leqslant n\leqslant m$ なる任意の自然数 n, m に対して

$$\mu(S_m)-\mu(R_n)<2\varepsilon \tag{2}$$

となる．

3° 点列の延長定理により，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$ の列 $\langle R_n\rangle_{n\in\boldsymbol{N}}$, $\langle S_n\rangle_{n\in\boldsymbol{N}}$ を内的な超点列 $\hat{\boldsymbol{N}}\to\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_\Gamma$ に延長する．正確にはつぎのとおり．$\Gamma=\hat{\gamma}$, $R_n=\hat{\rho}_n$, $S_n=\hat{\sigma}_n$ $(\gamma, \rho_n,$

$\sigma_n{}^*\in \boldsymbol{A}$) と書き，点列 $\rho, \sigma: \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{A}_\Gamma$ を＊点列 $^*\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{A}_\Gamma$ に延長する．延長された超点列を同じ記号 ρ, σ で表わすことにし，$n\in {}^*\boldsymbol{N}$ に対して $R_n=\hat{\rho}_n$, $S_n=\hat{\sigma}_n$ とする．

さて，つぎの一変項論理式 $\phi(k)$ を考える：

$$k\in\boldsymbol{N}\wedge n_1\leqslant k\wedge\forall n\forall m[n\in\boldsymbol{N}\wedge m\in\boldsymbol{N}\wedge n_1\leqslant n\leqslant m\leqslant k\to\sigma_n\subset\sigma_m\wedge \nu(\sigma_m-\rho_n)<2\varepsilon].$$

内性の判定定理 **2.5.6** により，$\hat{\boldsymbol{N}}$ の部分集合

$$K=\{k\in\hat{\boldsymbol{N}}\,;\,{}^*\models\phi(k)\}$$

は内的である．これをもっと分りやすく言うと，n_1 より大きい超自然数 k で，$n_1\leqslant n\leqslant m\leqslant k$ なる任意の超自然数 n, m に対して

$$S_n\subset S_m,\quad \overset{\square}{\nu}(S_m-R_n)<2\varepsilon \tag{3}$$

が成りたつようなものの全体 K は内的である．

ところが，(2) により，n_1 より大きい任意の自然数 k は (3) をみたす．すなわち，$\mathring{\boldsymbol{N}}=\{^*n\,;\,n\in\boldsymbol{N}\}\subset K$. $\mathring{\boldsymbol{N}}$ は外的だから $\mathring{\boldsymbol{N}}\subsetneq K$，すなわち K は少なくとも一つの無限大超自然数を含む．その一つを n_2 とすると，$\mu(S_{n_2}-R_{n_1})<3\varepsilon$. また，$R_{n_1}\subset A_{n_1}\cap\Gamma\subset A\cap\Gamma$. $A\cap\Gamma$ の任意の元はある $A_n\cap\Gamma$ ($n\in\boldsymbol{N}$) に属する．よって $x\in S_n$. $n\leqslant n_2$ だから (3) によって $x\in S_{n_2}$，すなわち $A\cap\Gamma\subset S_{n_2}$ となる．

結局，$R_{n_1}, S_{n_2}\in\boldsymbol{A}_\Gamma$, $R_{n_1}\subset A\cap\Gamma\subset S_{n_2}$, $\mu(S_{n_2}-R_{n_1})<3\varepsilon$ となり，A が $\boldsymbol{B}$ に属することが証明された．∎

B.1.4　定義　　$\boldsymbol{B}$ の元 A に対し，

$$\lambda(A)=\inf\{\mu(Q)\,;\,Q\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ A\subset Q\}$$

とおく．これが可算加法的測度であることを示す．

B.1.5　補題　　1)　$P\in\boldsymbol{A}$ なら $\lambda(P)=\mu(P)$.

2)　$A, B\in\boldsymbol{B}$, $A\subset B$ なら $\lambda(A)\leqslant\lambda(B)$.

3)　$A\in\boldsymbol{B}$, $\lambda(A)<+\infty$ なら $\lambda(A)=\sup\{\mu(P)\,;\,P\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ P\subset A\}$.

4)　（有限加法性）$A, B\in\boldsymbol{B}$, $A\cap B=\varnothing$ なら

$$\lambda(A\cup B)=\lambda(A)+\lambda(B).$$

証明　1) と 2) は明らかだから，3), 4) を証明する．

3)　$\lambda(A)$ の定義により，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}{}^{fin}$ の元 Γ で，$A\subset\Gamma$，$\mu(\Gamma)<\lambda(A)+1$ なるものが存在する．$\boldsymbol{B}$ の定義により，任意の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}^{++}$ に対し，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}_{\Gamma}$ の元 P, Q で，$P\subset A=A\cap\Gamma\subset Q$，$\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$ なるものがある．$\mu(P)=\lambda(P)\leqslant\lambda(A)\leqslant\lambda(Q)=\mu(Q)$ だから，$\lambda(A)<\mu(P)+\varepsilon$．$\varepsilon$ は任意だから $\lambda(A)\leqslant\sup\{\mu(P)\,;\,P\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ P\subset A\}$ となる．逆不等式は明らか．

4)　$\lambda(A)$，$\lambda(B)$ のうちの少なくとも一方が $+\infty$ なら，証明すべき式は $+\infty=+\infty$ で成りたつ．$\lambda(A)$，$\lambda(B)<+\infty$ とする．

$$\begin{aligned}\lambda(A\cup B)&=\inf\{\mu(S)\,;\,S\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ A\cup B\subset S\}\\&\leqslant\inf\{\mu(P\cup Q)\,;\,P,Q\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ A\subset P,\ B\subset Q\}\\&\leqslant\inf\{\mu(P)+\mu(Q)\,;\,P,Q\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ A\subset P,\ B\subset Q\}\\&\leqslant\inf\{\mu(P)\,;\,P\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ A\subset P\}+\inf\{\mu(Q)\,;\,Q\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ A\subset Q\}\\&=\lambda(A)+\lambda(B).\end{aligned}$$

したがって $\lambda(A\cup B)<+\infty$．3) により，

$$\begin{aligned}\lambda(A\cup B)&=\sup\{\mu(R)\,;\,R\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ R\subset A\cup B\}\\&\geqslant\sup\{\mu(P\cup Q)\,;\,P,Q\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ P\cup A,\ Q\subset B\}\\&\qquad(P\cap Q\subset A\cap B=\varnothing\text{ だから})\\&=\sup\{\mu(P)+\mu(Q)\,;\,P,Q\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ P\subset A,\ Q\subset B\}\\&=\sup\{\mu(P)\,;\,P\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ P\subset A\}+\sup\{\mu(Q)\,;\,Q\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}},Q\subset A\}\\&=\lambda(A)+\lambda(B)\quad\blacksquare\end{aligned}$$

B.1.6　定理　λ は $\boldsymbol{B}$ 上の可算加法的測度である．

証明　$\boldsymbol{B}$ の元の無共分列 $\langle A_n\rangle_{n\in\boldsymbol{N}}$，$n\neq m$ なら $A_n\cap A_m=\varnothing$，に対して $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)$ が成りたつことを示す．$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ とおく．$A\in\boldsymbol{B}$.

有限加法性により，任意の自然数 k に対して，$\sum_{n=1}^{k}\lambda(A_n)=\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{k}A_n\right)\leqslant\lambda(A)$．したがって $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)\leqslant\lambda(A)$.

逆不等式を示そう．もし $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)=+\infty$ ならば，両辺とも $+\infty$ で等式が

成りたつ．$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)=s<+\infty$ とする．$\varepsilon\in\boldsymbol{R}^{++}$ が与えられたとし，各 $n\in\boldsymbol{N}$ に対し，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の元 P_n で，$A_n\subset P_n$，$\mu(P_n)<\lambda(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ なるものをとる．点列の延長定理により，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の点列 $\langle P_n\rangle_{n\in\boldsymbol{N}}$ を $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の内的超点列 $\langle P_n\rangle_{n\in\hat{\boldsymbol{N}}}$ に延長する．任意の無限大超自然数 k に対し，

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\subset\bigcup_{n=1}^{k}P_n.$$

超自然数 k で，$\overset{\square}{\nu}\left(\bigcup_{n=1}^{k}P_n\right)<s+\varepsilon$ なるものの全体 K は内的である（正確には，$P_n=\hat{\pi}_n$，$\pi_n{}^*\in\boldsymbol{A}$ とし，$\nu\left({}^*\bigcup_{n=1}^{k}\pi_n\right)<s+\varepsilon$ なる k の全体）．特に k が普通の自然数なら，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k}P_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{k}\mu(P_n)\leqslant\sum_{n=1}^{k}\left[\lambda(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]<\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{k}A_n\right)+\varepsilon\leqslant s+\varepsilon$$

が成りたつ．よって $\overset{\square}{\nu}\left(\bigcup_{n=1}^{k}P_n\right)<s+\varepsilon$，すなわち $\mathring{\boldsymbol{N}}\subset K$．$\mathring{\boldsymbol{N}}$ は外的だから，K は無限大超自然数 k を含む．$Q=\bigcup_{n=1}^{k}P_n$ とすると，$Q\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$，$\mu(Q)<s+\varepsilon$ だから，

$$A\subset Q,\quad \lambda(A)\leqslant\mu(Q)<s+\varepsilon$$

となる．ε は任意だから $\lambda(A)\leqslant s$ が成りたつ．∎

B.1.7　注意　　上記では，いわば《初等的》にローブの定理を証明した．もし標準測度論におけるカラテオドリの延長定理（E. ホップの延長定理ともいう）を使えば，ローブの定理は簡単に証明できる．

カラテオドリの延長定理　　$(X,\boldsymbol{A},\mu)$ を有限加法的測度空間とする．$\boldsymbol{A}$ の元の無共分列 $\langle P_n\rangle_{n\in\boldsymbol{N}}$，$n\neq m$ なら $P_n\cap P_m=\emptyset$，かつ $P=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\in\boldsymbol{A}$ なる任意のものに対して $\mu(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(P_n)$ が成りたつならば，μ は $\sigma(\boldsymbol{A})$ 上の可算加法的測度に延長できる．

したがって，ローブの定理（一意性を除く）を示すためには，$(\hat{X},\overset{\square}{\boldsymbol{A}},\mu)$ が上の可算加法条件をみたすことを示せばよい．

$\langle P_n\rangle_{n\in N}$ を $\overset{\square}{A}$ の無共分列（$n\neq m$ なら $P_n\cap P_m=\emptyset$），$P=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n\in\overset{\square}{A}$ とする．$Q_k=\bigcup_{n=1}^{k}P_k$ とおくと，ある $k\in N$ に対して $Q_k=P$ になってしまう．実際，どんな $k\in N$ に対しても $Q_k\neq P$ と仮定し，$P=\hat{\pi}$，$Q_k=\hat{\rho}_k$（$\pi,\rho_k{}^*\in A$）とおく．二変項論理式

$$\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})\equiv\mathrm{y}\in\pi\wedge\mathrm{y}\notin\mathrm{x}$$

を考える．$^*U$ の可算部分集合 $\mathscr{C}=\{\rho_1,\rho_2,\cdots\}$ の任意有限個の元 $\rho_{i_1},\cdots,\rho_{i_m}$ に対し，ある $\beta\in{}^*U$ をとると，$^*\models\phi(\rho_{i_k},\beta)$ が成りたつ．可算飽和性により，ある $\beta\in{}^*U$ をとると，$\mathscr{C}$ のすべての元 ρ_k に対して $^*\models\phi(\rho_k,\beta)$ となる．すなわち，すべての $k\in N$ に対して $\hat{\beta}\in P$，$\hat{\beta}\notin Q_k$ となり矛盾．すなわち，$P=\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n$ は実は有限個の合併 $P=\bigcup_{n=1}^{k}P_n$，$P_n=\emptyset$（$n\geqq k$）となり，$\mu(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(P_n)$ は自明となる．∎

B.1.8 系　$(\hat{X},\boldsymbol{B},\lambda)$ は完備である．すなわち，$A\in\boldsymbol{B}$，$\lambda(A)=0$，$B\subset A$ なら $B\in\boldsymbol{B}$．

証明　$\boldsymbol{B}$ の定義から明らか．∎

B.1.9 系　$\lambda(A)<+\infty$ なる任意の $A\in\boldsymbol{B}$ に対し，$\overset{\square}{A}$ の元 P で $\lambda(A\triangle P)=0$ なるものが存在する．ただし，$A\triangle P=(A-P)\cup(P-A)$．特に $\lambda(X)<+\infty$ なら，任意の $A\in\boldsymbol{B}$ に対して成りたつ．

証明　前と同様に，$\overset{\square}{A}$ の元の列 $\langle P_n\rangle_{n\in N}$，$\langle Q_n\rangle_{n\in N}$ で，

$$P_n\subset A\subset Q_n,\quad P_n\subset P_{n+1},\quad Q_n\supset Q_{n+1},\quad \mu(Q_n-P_n)<\frac{1}{n}\quad\cdots\cdots(*)$$

なるものが存在する．これらを超点列 $\langle P_n\rangle_{n\in N}$，$\langle Q_n\rangle_{n\in N}$ に延長する．

超自然数 k で，k 以下のあらゆる超自然数 $n\leqq m$ に対して

$$P_n\subset P_m,\quad Q_n\supset Q_m,\quad \nu(\rho_n-\pi_n)<\frac{1}{n}$$

（$P_n=\hat{\pi}_n$，$Q_n=\hat{\rho}_n$）なるものの全体 K は $\mathring{N}$ を含み，内的である．したがって K は無限大自然数 k を含む．P_k は定理の条件をみたす．∎

注意　$P_k \subset A$ とか $A \subset Q_k$ のように取ることはできない.

B.1.10　定義　以上により，$(\hat{X}, \boldsymbol{B}, \lambda)$ は $(\hat{X}, \overset{\square}{\boldsymbol{A}}, \mu)$ を含む完備な可算加法的測度空間であることが分った．$\overset{\square}{\boldsymbol{A}} \subset \sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}}) \subset \boldsymbol{B}$ だから，λ を $\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ に制限することにより，ローブの定理（一意性を除く）が証明されたことになる．$\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ を λ に関して完備化したものを $L(\boldsymbol{A})$ と書き，完備な可算加法的測度空間 $(\hat{X}, L(\boldsymbol{A}), \lambda)$ を $(X, \boldsymbol{A}, \nu)$ に伴う**ローブ（測度）空間**と言い，$L(\boldsymbol{A})$ 上の測度 λ を，ν に伴う**ローブ測度**と言う．

つぎに，$(X, \boldsymbol{A}, \nu)$ が有限の場合，すなわち $\nu(X)$ が有限超実数の場合に，延長の一意性および $\boldsymbol{B}=L(\boldsymbol{A})$ が成りたつことを示す．

B.1.11　定理　$(X, \boldsymbol{A}, \nu)$ が有限なら延長は一意的である．

証明　有限加法的測度 μ が $\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ 上の可算加法的測度 κ にも延長されたとする．A を $\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ の元とする．$P, Q \in \overset{\square}{\boldsymbol{A}}$，$P \subset A \subset Q$ なら $\mu(P) \leqslant \kappa(A) \leqslant \mu(Q)$ だから，λ の定義および補題 **B.1.5** の 3) により，

$$\kappa(A) \leqslant \inf\{\mu(Q)\ ;\ Q \in \overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ A \subset Q\} = \lambda(A),$$
$$\kappa(A) \geqslant \sup\{\mu(P)\ ;\ P \in \overset{\square}{\boldsymbol{A}},\ P \subset A\} = \lambda(A).$$

したがって $\kappa(A)=\lambda(A)$．∎

B.1.12　定理　$(X, \boldsymbol{A}, \nu)$ が有限なら，$\boldsymbol{B}=L(\boldsymbol{A})$．

証明　$\boldsymbol{B}$ の元 A に対し，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の列 $\langle P_n \rangle_{n \in N}$，$\langle Q_n \rangle_{n \in N}$ で，

$$P_n \subset A \subset Q_n,\quad P_n \subset P_{n+1},\quad Q_n \supset Q_{n+1},$$
$$\mu(Q_n) < \lambda(A) + \frac{1}{n},\quad \mu(P_n) > \lambda(A) + \frac{1}{n}$$

なるものが存在する．$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$，$Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n$ はともに $\sigma(\overset{\square}{\boldsymbol{A}})$ に属し，簡単に分るように，$P \subset A \subset Q$，$\lambda(P)=\lambda(A)=\lambda(Q)$ が成りたつ．$A-P$ は $Q-P$ に含まれ，$\lambda(Q-P)=0$ だから，$A-P \in L(\boldsymbol{A})$．したがって $A=P \cup (A-P)$ も $L(\boldsymbol{A})$ に属する．∎

B.1.13 注意 $(X, \boldsymbol{A}, \nu)$ が有限でない場合は事情が複雑になる．このときでも延長の一意性は成りたつが，$\boldsymbol{B}=L(\boldsymbol{A})$ とならない．一意性の証明は [47] または [45] を，その他の性質については [45] を見よ．

§2 ローブ測度の性質

この節では $(X, \boldsymbol{A}, \nu)$ は有限，すなわち $\nu(X)$ は有限超実数とする．そうでない場合については [45] を見よ．また，前節のように馬鹿丁寧な証明はつけない．

$\hat{X}$ から ${}^*\overline{\boldsymbol{R}}$ への内的な関数 F が $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ **可測**であるとは，任意の超実数 α に対し，$\{x\in\hat{X}\,;\,F(x)\geqslant\alpha\}$，$\{x\in\hat{X}\,;\,F(x)\leqslant\alpha\}$ がともに $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ に属することである．この定義がどれほどの意味をもつか私には分らないが，ν が＊可算加法的な場合には，普通の可測性と一致する．そうでない場合には，なるべく超階段関数の範囲内で話をすませることにする．

B.2.1 定義 $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 可測関数 F が $L(\boldsymbol{A})$ 可測関数 f の**持ちあげ** (lifting) であるとは，λ に関してほとんどすべての $x\in\hat{X}$ に対して $F(x)\fallingdotseq f(x)$ が成りたつことである．$\mathrm{st}[F(x)]$ を ${}^\circ F(x)$ と書くことにすれば，

$$\lambda\{x\in\hat{X}\,;\,{}^\circ F(x)\neq f(x)\}=0.$$

F が $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 可測なら，${}^\circ F$ はローブ可測で，F は ${}^\circ F$ の持ちあげである．実際，任意の実数 a に対し，

$$\{x\in\hat{X}\,;\,{}^\circ F(x)\leqslant a\}=\bigcap_{n\in N}\left\{x\in\hat{X}\,;\,F(x)\leqslant a+\frac{1}{n}\right\}\in L(\boldsymbol{A})$$

だから ${}^\circ F$ は $L(\boldsymbol{A})$ 可測．当然 F は ${}^\circ F$ の持ちあげである．この逆が強い形で成りたつ．まず階段関数の持ちあげを考える．

$L(\boldsymbol{A})$ の元 A, B に対し，$\lambda(A\triangle B)=0$ が成りたつとき，$A\overset{\lambda}{\approx}B$ と書くことにしよう．f がローブ階段関数なら，$f=\sum_{i=1}^{n}a_i\Phi_{A_i}$ と書ける．ただし，各 i に対して $a_i\in\boldsymbol{R}$，$A_i\in L(\boldsymbol{A})$，Φ_{A_i} は A_i の特性関数である．系 **B.1.9** により，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の元 P_i で $A_i\overset{\lambda}{\approx}P_i$ なるものが存在する．$F=\sum_{i=1}^{n}a_i\Phi_{P_i}$ とおくと，F

は $\overset{\square}{A}$ 階段関数で，明らかに f の持ちあげになっている．特に，F は実数値である．

B.2.2　定理　　関数 $f:\hat{X}\to\overline{R}$ がローブ可測ならば，$\hat{X}$ 上の内的な $\overset{\square}{A}$ 超階段関数 $G:\hat{X}\to\hat{R}$ で，f の持ちあげであるものが存在する．

証明　　1°　$X_0=\{x\in\hat{X}\,;\,|f(x)|<+\infty\}$，$X_n=\{x\in\hat{X}\,;\,|f(x)|\leqslant n\}$ $(n\in N)$ とおく．X_0, X_n はローブ可測であり，各 X_n 上 f は有界だから，$\hat{X}$ 上のローブ階段関数 f_n で，あらゆる $x\in X_n$ に対して

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n} \tag{1}$$

なるものが存在する．各 n に対してこのような f_n を一つとる．$n\leqslant m$ なら，あらゆる $x\in X_n$ に対して

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\frac{2}{n} \tag{2}$$

が成りたつ．**B.2.1** の記述により，f_n の持ちあげである超階段関数（実数値）F_n が存在する．X のほとんどすべての x に対して

$$F_n(x)\fallingdotseq f_n(x) \tag{3}$$

が成りたつ．

系 **B.1.9** により，$\overset{\square}{A}$ の元 Y_n で，$X_n\overset{\lambda}{\approx}Y_n$ なるものがある．これを，$n\leqslant m$ なら $Y_n\subset Y_m$ となるように取る（やさしい）．$\hat{X}$ 上の $\overset{\square}{A}$ に関する超階段関数の全体を $\mathscr{S}(A)$ としよう．$\mathscr{S}(A)$ は内的である．$\overset{\square}{A}$ の列 $\langle Y_n\rangle_{n\in N}$ および $\mathscr{S}(A)$ の列 $\langle F_n\rangle_{n\in N}$ をそれぞれ $\overset{\square}{A}, \mathscr{S}(A)$ の超列 $\langle Y_n\rangle_{n\in\hat{N}}$，$\langle F_n\rangle_{n\in\hat{N}}$ に延長する．$n\leqslant m$ なる超自然数 n, m に対し，

$$Z_{n,m}=\left\{x\in Y_n\,;\,|F_m(x)-F_n(x)|>\frac{2}{n}\right\}$$

とおく．$Z_{n,m}$ は内的で $\overset{\square}{A}$ に属する．特に，n, m が有限自然数なら，(2) と (3) により，$\nu(Z_{n,m})\fallingdotseq 0$ だから，$m\cdot\nu(Z_{n,m})\leqslant 1$ が成りたつ．

超自然数 m で，任意の $n\leqslant m$ に対して

$$Y_n\subset Y_m,\quad m\cdot\nu(Z_{n,m})\leqslant 1 \tag{4}$$

なるものの全体は内的であり，有限自然数をすべて含む．したがって無限大自然数 m で (4) をみたすものが存在する（その一つをとる）．(4) により，

$$\nu(Z_{n,m}) \fallingdotseq 0 \tag{5}$$

が成りたつ．

2°　X_0 上，λ に関してほとんど到るところ $^\circ F_m(x)=f(x)$ となることを示す．$A=\{x\in X_0\,;\,^\circ F_m(x)\neq f(x)\}$ として $\lambda(A)=0$ を示せばよい．そのために，各 $n\in \boldsymbol{N}$ に対して $A_n=\left\{x\in X_n\,;\,|^\circ F_m(x)-f(x)|>\dfrac{4}{n}\right\}$ とすると，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ だから，$\lambda(A_n)=0$ を示せばよい．X_n の元 x に対し，

$|^\circ F_m(x)-f(x)|\leqslant|^\circ F_m(x)-F_n(x)|+|F_n(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|.$

この右辺の第2項は (3) によってほとんど到るところ0である．第3項は (1) によって $\dfrac{1}{n}$ より小さい．だから，もし $x\in A_n$ ならば，右辺の第1項は（測度ゼロの集合を除いて）$\dfrac{2}{n}$ より大きい．すなわち（$x\in Y_n$ なら）$x\in Z_{n,m}$ となる．(5) によって $\lambda(A_n)=0$ が成りたち，証明ができた．

3°　$X_\pm=\{x\in\hat{X}\,;\,f(x)=\pm\infty\}$（複号同順）とし，$X_+\overset{\lambda}{\approx}Y_+$，$X_-\overset{\lambda}{\approx}Y_-$ なる $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の元 Y_+, Y_- を，$Y_+\cap Y_-=\varnothing$ なるようにとり，$Y_0=\hat{X}-(Y_+\cup Y_-)$ とおく．Y_0 も $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ に属し，$X_0\overset{\lambda}{\approx}Y_0$．そこで，

$$G(x)=\begin{cases}F_m(x) & x\in Y_0 \text{ のとき}\\ m & x\in Y_+ \text{ のとき}\\ -m & x\in Y_- \text{ のとき}\end{cases}$$

とおくと，G は内的な $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 超階段関数であり，f の持ちあげである．∎

B.2.3　つぎに積分を扱うために，定理 **B.2.2** を精密化する．$\hat{X}$ 上のロープ可測関数 f の，ロープ可測集合 A 上の積分を $\int_A f$ と略記する．$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 超階関数 $F=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\Phi_{P_i}$ $(k\in\hat{\boldsymbol{N}})$ の，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の元 Y 上の超積分とは，$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot\nu(P_i\cap Y)$ のことである．ただし，$\langle P_i\,;\,1\leqslant i\leqslant k\rangle$ は $\hat{X}$ の内的な分割，α_i は超実数である．この超積分を $^*\!\int_Y F$ と略記する．

$\hat{X}$ 上のロープ階段関数 $f=\sum_{i=1}^{k}a_i\Phi_{A_i}$ $(k\in\boldsymbol{N},\ a_i\in\boldsymbol{R},\ A_i\in L(\boldsymbol{A}))$ に対しては，$F=\sum_{i=1}^{k}a_i\Phi_{P_i}$ が f の持ちあげだった（$P_i\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$，$P_i\overset{\lambda}{\approx}A_i$）．このとき，明らかに $^*\!\int_Y F\fallingdotseq\int_Y f$ が任意の $Y\in L(\boldsymbol{A})$ に対して成りたつ．これを一般化

して，つぎの定理を証明する．

B.2.4 定理　定理 **B.2.2** と同じ状況で，さらに f がローブ可積分であれば，f の持ちあげ超階段関数 F として，任意の $Y\in\overset{\square}{A}$ に対して

$$^*\!\!\int_Y F \doteqdot \int_Y f$$

となるものが取れる．

証明　定理 **B.2.2** の証明をちょっと精密にすればよい．この場合 $X_0\overset{\lambda}{\approx}\hat{X}$ に注意する．f を正負の部分に分けることにより，はじめから $f\geqslant 0$ としてよい．まずローブ階段関数 f_n の条件に，

$$0\leqslant f_n\leqslant f,\quad 0\leqslant\int_X f-\int_X f_n<\frac{1}{n} \tag{6}$$

を付け加える．当然，任意の $Y\in L(A)$ に対して

$$0\leqslant\int_Y f-\int_Y f_n<\frac{1}{n}$$

となる．F_n としては **B.2.3** にあるものをとり，$Y_n, Z_{n,m}$ は定理 **B.2.3** のとおりとする．超自然数 m で，任意の $n\leqslant m$ に対して，条件 (4) のほかに，任意の $Y\in\overset{\square}{A}$ に対して

$$\left|{}^*\!\!\int_Y F_m-{}^*\!\!\int_Y F_n\right|<\frac{2}{n} \tag{7}$$

という条件を加える．このような m の全体も内的であり，有限自然数をすべて含むから，無限大超自然数 m を含む．F_m が積分に関する条件をみたせばよい．実際，任意の $Y\in\overset{\square}{A}$ および任意の有限自然数 n に対し，

$$\left|{}^*\!\!\int_Y F_m-\int_Y f\right|\leqslant\left|{}^*\!\!\int_Y F_m-{}^*\!\!\int_Y F_n\right|+\left|{}^*\!\!\int_Y F_n-\int_Y f_n\right|+\left|\int_Y f_n-\int_Y f\right|.$$

右辺の第 1 項は $\dfrac{2}{n}$ より小さい．第 2 項は無限小，第 3 項は $\dfrac{1}{n}$ より小さいから，左辺は $\dfrac{4}{n}$ より小さい．n は任意だから ${}^*\!\!\int_Y F_m\approx\int_Y f$ となる．∎

B.2.5　f がローブ可積分のとき，f の任意の持ちあげ（階段関数）G に対して ${}^*\!\!\int_X G\doteqdot\int_X f$ となることは期待できない．たとえば，$\nu(P)$ が正の無限小であるような $P\in\overset{\square}{A}$ があったとして，$G=\dfrac{\alpha}{\nu(P)}\cdot\Phi_P$ $(\alpha\in\hat{R})$ とすると，st$[G(x)]$ は λ に関してほとんど到るところ 0 で，G は 0 の持ちあげだけれ

ども，$^*\!\int_X G=\alpha$ となる．

我々は有限加法的測度に関する可測関数の積分を定義していない．しかし，$(X, \boldsymbol{A}, \nu)$ が＊可算加法的なら，$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 可測関数の超積分は普通どおりに定義されているから，これも $^*\!\int_Y F$（$Y\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$，$F$ は $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 可測）と略記する．

B.2.6　定理　　f をローブ可積関数，G を f の持ちあげ超階段関数（ν が＊可算加法的のときは $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 可測関数）とする．任意の $Y\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ に対して

$$^*\!\int_Y G \fallingdotseq \int_Y f$$

が成りたつためには，$\nu(P)\fallingdotseq 0$ なる任意の $P\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ に対して

$$^*\!\int_P G \fallingdotseq 0 \tag{8}$$

が成りたつことが必要十分である．

証明　　$\nu(P)\fallingdotseq 0$ なら $\lambda(P)=0$ だから，条件 (8) が必要であることは明らか．

つぎに G が条件 (8) をみたすとしよう．定理 **B.2.4** で作った F をとり，超自然数 n に対して

$$P_n=\left\{x\in\hat{X}\,;\ |G(x)-F(x)|>\frac{1}{n}\right\}$$

とおく．写像 $n\longmapsto P_n$ は内的であり，F も G も f の持ちあげだから，n が有限なら $\overset{\square}{\nu}(P_n)\fallingdotseq 0$，したがって $n\cdot\overset{\square}{\nu}(P_n)=0$．こうなる n の全体は内的だから，無限大自然数 m で，$m\cdot\overset{\square}{\nu}(P_m)=0$ となるものがある．当然 $\overset{\square}{\nu}(P_m)\fallingdotseq 0$ である．条件 (8) によって $^*\!\int_{P_m\cap Y}F\fallingdotseq 0$，$^*\!\int_{P_m\cap Y}G\fallingdotseq 0$．$(\hat{X}-P_m)\cap Y$ を Z と書くと，

$$\left|{}^*\!\int_Z G-{}^*\!\int_Z F\right|\leqq {}^*\!\int_Z|G-F|\leqq\frac{1}{m}\nu(X)\fallingdotseq 0 \quad だから，$$

$$^*\!\int_Y G={}^*\!\int_{P_m\cap Y}G+{}^*\!\int_Z G\fallingdotseq{}^*\!\int_Z F\fallingdotseq{}^*\!\int_Y F\fallingdotseq\int_Y f$$

となる．∎

B.2.7　定理　　F を $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 超階段関数（ν が＊可算加法的のときは $\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ 可測関数）とする．$^\circ F$ がローブ可積分で，しかも任意の $Y\in\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ に対して

$$ {}^*\!\!\int_Y F \fallingdotseq \int_Y {}^\circ F $$

が成りたつためには，任意の正の無限大超実数αに対して，

$$ {}^*\!\!\int_{|F(x)|\geqq\alpha} |F| \fallingdotseq 0 $$

となることが必要十分である．ただし，この左辺は$\overset{\square}{A}$の元$\{x\in\hat{X}\,;\,|F(x)|\geqq\alpha\}$上の$|F|$の超積分を表わす．

証明　$F(x)\geqq 0$と仮定してよい．

1°　必要性．$X(\alpha)=\{x\in\hat{X}\,;\,F(x)\geqq\alpha\}$とする．$F$は$X$上$*$可積分で，その積分値は有限超実数だから，$\overset{\square}{\nu}(X(\alpha))\fallingdotseq 0$，したがって$\lambda(X(\alpha))=0$．よって${}^*\!\int_{X(\alpha)} F \fallingdotseq \int_{X(\alpha)} {}^\circ F=0$.

2°　十分性．任意の無限大超自然数nに対して${}^*\!\int_{X(n)} F<1$だから，ある有限自然数nに対して${}^*\!\int_{X(n)} F<1$となる．したがって，

$$ {}^*\!\!\int_X F={}^*\!\!\int_{X(n)} F+{}^*\!\!\int_{X-X(n)} F<1+n\cdot\nu(X) $$

となり，Fは$*$可積分でその値は有限超実数である．$g\leqq{}^\circ F$なる任意のローブ階段関数gに対し，B.2.3のような自然な持ちあげ階段関数Gで，$G\leqq F+1$なるものが取れる．

$$ \int_X g \fallingdotseq {}^*\!\!\int_X G \leqq {}^*\!\!\int_X F+\nu(X) $$

だから，${}^\circ F$はローブ可積分である．Fは${}^\circ F$の持ちあげだから，$\nu(P)\fallingdotseq 0$なる任意の$P\in\overset{\square}{A}$に対して${}^*\!\int_P F\fallingdotseq 0$であることを示せば，前定理によって証明が完成する．もし$\nu(P)=0$ならこれは当然だから，$\nu(P)\not\fallingdotseq 0$とする．$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\nu(P)}}$は正の無限大超実数だから，${}^*\!\int_{P\cap X(\alpha)} F\fallingdotseq 0$．一方，${}^*\!\int_{P\cap(X-X(\alpha))} F\leqq\nu(P)\cdot\alpha=\sqrt{\nu(P)}\fallingdotseq 0$．したがって${}^*\!\int_P F\fallingdotseq 0$が成りたつ．∎

B.2.8　定義　上の定理の条件をみたす関数をS**可積分関数**という．すなわち，$\overset{\square}{A}$超階段関数（νが可算加法的のときは$\overset{\square}{A}$可測関数）FがS可積分であるとは，任意の正の無限大超実数αに対して

$$ {}^*\!\!\int_{|F(x)|\geqq\alpha} |F| \fallingdotseq 0 $$

が成りたつことである.

B.2.9 以上すべての事柄について，もっとも重要かつ簡潔なのは，X が∗有限集合の場合である．X の∗部分集合 P に対し，

$$\nu(P)=\frac{{}^*|P|}{{}^*|X|}$$

は $^*\mathscr{P}$ (X) 上の無制限に加法的な確率∗測度を与える．このとき，$A={}^*\mathscr{P}$ (X) であり，内的な関数はすべて可測になる．次節でこれをルベーグ測度に応用する.

§3 ルベーグ測度

B.3.1 話を簡単にするために，$Y=[0,1]$ 上のルベーグ測度（これを m と書く）を扱う.

無限大超自然数 K を固定し，$X={}^*\left\{\frac{n}{K}\,;\,n=0,1,\cdots,K-1\right\}$ とおく．X は K 個の元から成る∗有限集合である．$A={}^*\mathscr{P}$ (X) とし，A の元 P に対して $\nu(P)=\frac{{}^*|P|}{K}$ とおく．(X,A,ν) からローブ測度空間 $(\hat{X},L(A),\lambda)$ をつくっておく.

$X^*\subset{}^*Y$ だから，$\hat{X}$ の元 x にその標準部分を対応させる外的な写像 st は $\hat{X}$ から Y への写像であり，K が無限大なので，st の像は Y 全体を覆う.

$\hat{X}$ の内的部分集合 P に対し，$\{\mathrm{st}(x)\,;\,x\in P\}$ を $\mathrm{st}(P)$ と書く．Y の部分集合 S に対し，$\{x\in\hat{X}\,;\,\mathrm{st}(x)\in S\}$ を $\mathrm{st}^{-1}(S)$ と書く．$\mathrm{st}(x)$ のことを $^\circ x$ とも書く.

B.3.2 命題 P が $\hat{X}$ の内的部分集合なら，$\mathrm{st}(P)$ は Y の閉部分集合である.

証明 $\mathrm{st}(P)$ の点列 $\langle a_n\rangle_{n\in N}$ が Y の点 b に収束するとする．任意の無限大超自然数 n に対し，$^*a_n\fallingdotseq b$ である．各自然数 n に対し，$a_n=\mathrm{st}(\alpha_n)$ となる P の点 α_n をとる．可算飽和性の仮定により，外点列 $\langle\alpha_n\rangle_{n\in N}$ は P の内的

超点列 $\langle \alpha_n \rangle_{n\in\hat{N}}$ に延長される．$\hat{N}$ の部分集合

$$\{n\in\hat{N}\,;\,n|\alpha_n-{}^*a_n|\leqslant 1\}$$

は内的であり，有限自然数をすべて含む．したがって少なくとも一つの無限大超自然数 λ を含む．$\lambda|\alpha_\lambda-{}^*a_\lambda|\leqslant 1$ だから $\alpha_\lambda\fallingdotseq{}^*a_\lambda$，よって $\alpha_\lambda\fallingdotseq b$，すなわち $b=\mathrm{st}(\alpha_\lambda)$ となり，b は $\mathrm{st}(P)$ に属する．■

B.3.3　定理　$Y=[0,1]$ の部分集合 S がルベーグ可測であるためには，$\hat{X}$ の部分集合 $\mathrm{st}^{-1}(S)$ がローブ可測であることが必要十分である．このとき，$m(S)=\lambda(\mathrm{st}^{-1}(S))$ が成りたつ．ただし，m はルベーグ測度，λ はローブ測度である．

証明　1°　S がルベーグ可測とする．$\hat{X}$ から ${}^*Y$ への内関数 $\mathrm{id}: x\longmapsto x$ は X から Y への関数 st の持ちあげである．実際，$\mathrm{st}(x)\fallingdotseq\mathrm{id}(x)$．いま，内関数はすべて $\boldsymbol{A}*$可測だから，**B.2.1** の注意によって関数 st はローブ可測である．

S が開区間 (a,b) のとき，任意の $\varepsilon\in\boldsymbol{R}^{++}$ に対して

$$\left\{\frac{n}{K}\,;\,a+\varepsilon\leqslant\frac{n}{K}\leqslant b-\varepsilon\right\}\subset\mathrm{st}^{-1}(a,b)\subset\left\{\frac{n}{K}\,;\,a<\frac{n}{K}<b\right\}$$

だから，$b-a-2\varepsilon\leqslant\lambda(\mathrm{st}^{-1}(a,b))\leqslant b-a+\varepsilon$，したがって $\lambda(\mathrm{st}^{-1}(a,b))=b-a=m(a,b)$ となる．これから，任意のボレル集合 S に対して $\mathrm{st}^{-1}(S)\in L(\boldsymbol{A})$，$\lambda(\mathrm{st}^{-1}(\boldsymbol{S}))=m(S)$ が成りたつ．$L(\boldsymbol{A})$ は完備だから，このことは任意のルベーグ可測集合 S に対しても成りたつ．

2°　$A=\mathrm{st}^{-1}(S)$ がローブ可測とする．S がルベーグ可測であることを示すためには，任意の正実数 ε に対し，ボレル集合 B,C で，$B\subset S\subset C$，$m(C-B)<\varepsilon$ なるものが存在することを示せばよい．

$\overset{\square}{\boldsymbol{A}}$ の元 P,Q で，$P\subset A\subset Q$，$\lambda(Q-P)<\varepsilon$ なるものが存在する．

$$B=\mathrm{st}(P),\quad C=Y-\mathrm{st}(\hat{X}-Q)$$

とおくと，命題 **B.3.2** によって B,C はボレル集合であり，$B\subset S\subset C$ である．1° で証明したことにより，$m(B)=\lambda(\mathrm{st}^{-1}(B))\geqslant\lambda(P)$．$m(C)=1-m(\mathrm{st}(\hat{X}-Q))=1-\lambda(\mathrm{st}^{-1}(\mathrm{st}(\hat{X}-Q)))\leqslant 1-\lambda(\hat{X}-Q)=\lambda(Q)$，よって $m(C-B)<\varepsilon$ となる．■

B.3.4 定義 f を $Y=[0,1]$ から $\overline{\boldsymbol{R}}$ への関数，F を $\hat{X}$ から $^*\boldsymbol{R}$ への内関数とする．ことばを流用し，F が f の**持ちあげ**であるとは，ローブ測度に関してほとんどすべての（$\hat{X}$ の）元 x に対して $F(x)\fallingdotseq f(\mathrm{st}(x))$ が成りたつことと定義する．これは，f に対して $\hat{X}$ から $\overline{\boldsymbol{R}}$ への関数 $\hat{f}$ を，$\hat{f}(x)=f(\mathrm{st}(x))$ で定めるとき，定義 **B.2.1** の意味で F が $\hat{f}$ の持ちあげだ，ということにほかならない．

同じ状況で，$\hat{X}$ のすべての元 x に対して $F(x)\fallingdotseq f(\mathrm{st}(x))$ が成りたつとき，F を f の**一様な持ちあげ** (uniform lifting) という．

B.3.5 定理 Y から $\boldsymbol{R}$ への関数 f が連続であるためには，f が一様な持ちあげをもつことが必要十分である．

証明 f が連続のとき，$^*f$ の $\hat{X}$ への制限 F は f の一様な持ちあげである．逆に f が一様な持ちあげ内関数 F をもつとする．a を Y の点，ε を正実数とする．正の超実数 δ で，つぎの条件 $P(\delta)$：

$$\forall x\in\hat{X}[\,|x-a|<\delta\to|F(x)-f(a)|<\varepsilon]$$

をみたすものの全体は内的である．とくに $\delta\fallingdotseq 0$ なら $x\fallingdotseq a$ だから，持ちあげの条件によって $F(x)\fallingdotseq f(a)$，よって δ は条件 $P(\delta)$ をみたす．Mon(0) は外集合だから，正の実数 δ で条件 $P(\delta)$ をみたすものがある．$y\in Y$，$|y-a|<\delta$ に対し，$x\in\hat{X}$，$x\fallingdotseq y$ なる x をとると，$|x-a|<\delta$ だから $|F(x)-f(a)|<\varepsilon$．$F(x)\fallingdotseq f(y)$ だから $|f(y)-f(a)|<\varepsilon$ となり，f は a で連続である．∎

B.3.6 定理 Y から $\overline{\boldsymbol{R}}$ への関数 f に対するつぎの三条件は同値である：

a) f はルベーグ可測である．

b) $\hat{f}$ はローブ可測である．

c) f は持ちあげをもつ．

証明 実数 a に対して $S=\{y\in Y\,;\,f(y)>a\}$ とすると，$\mathrm{st}^{-1}(S)=\{x\in X\,;\,\hat{f}(x)>a\}$ だから，定理 **B.3.3** によって a) と b) とは同値である．定理 **B.2.2** によって b) と c) とは同値である．∎

B.3.7　定理　Y から $\overline{R}$ への関数 f に対するつぎの三条件は同値である：

a)　f はルベーグ可積分である.

b)　$\hat{f}$ はローブ可積分である.

c)　f は S 可積分な持ちあげ F をもつ.

このとき，$\int_Y f\,dm=\int_{\hat{X}}\hat{f}\,d\lambda=\mathrm{st}\left[{}^*\!\int_X F\,d\nu\right]$ が成りたつ.

証明　f が階段関数 $f=\sum_{i=1}^{n}a_i\Phi_{A_i}$ のとき，$\hat{f}=\sum_{i=1}^{n}a_i\Phi_{\mathrm{st}^{-1}(A_i)}$ だから，定理 **B.3.3** によって a) と b) とは同値，したがって任意の f に対しても a) と b) とは同値である．定理 **B.2.4** および **B.2.7** によって b) と c) とは同値である．∎

あとがき

倉田令二朗が私に超積や超準解析の面白さを吹込みはじめたのは十二，三年も前である．最初から私は興味をもち，理解したいと思った．しかし，超積の方はともかく，数学基礎論を知らなかったためか，超準解析はどうしても本当には理解できなかった．はじめてどうにか分ったと思ったのは，

［1］ M. Machover & J. Hirschfeld ; Lectures on non-standard analysis. Springer Lecture Notes in Math. **94** (1969)

を読んでからである．

もちろんずっと前から理論はできていた．超準解析の登場は

［2］ A. Robinson ; Non-standard analysis. Indagationes Math. **23** (=Proc. Royal Acad. Sci., Amsterdam Ser. A **64**) (1961) 432—440

にさかのぼる．本格的な理論展開は

［3］ A. Robinson ; Non-standard analysis. North-Holland (1966) 第二版 (1974)

で行われた．これはいままでのところもっとも標準的な，記念碑的な本である．だが，私には分りにくかった．

本書の第二章で採用した枠組は［1］のものである．これは基礎論の知識がほとんど要らないという点で，私には実に有難かった．ただし，これは超積には触れていない．超積の理論，とくに基本定理 **2.4.3** は

［4］ J. Łoś; Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres. Mathematical interpretation of formal systems (ed. Skolem et al.) North-Holland (1955) 98-113

に基づく．

［5］ W. A. J. Luxemburg ; What is nonstandard analysis? Amer. Math. Monthly **80** (1973) Part II 38-67

は，超積理論に基づいて無限小解析を分りやすく解説したものである．本書第一章の例のいくつか（とくに非可測函数の例）はそこから借用した．第一

章 §5 の《超積の濃度》は

[6] S.Kochen ; Ultraproducts in the theory of models. Ann. Math. **74** (1961) 221-261

による.

広大モデルを飽和モデルと並行する形で扱ったのは本書（第三章）がはじめてだと思う．また，それらを超冪モデルとして構成する話は，主として

[7] C. C. Chang & H. J. Keisler ; Model theory. North-Holland (1973)

により，

[8] J. L. Bell & A. B. Slomson ; Models and ultraproducts : an introduction. North-Holland (1969)

[9] W. W. Comfort & S.Negrepontis ; The theory of ultrafilters. Springer (1974)

を参考にした. [7] は分厚い本格的教科書である. [8] はほどのよい入門書だが，善良超フィルターの存在定理は一般連続体仮説のもとで証明してある私は [9] のような本は好きでない. 専門家には別の感想もあろうが，私には，あらゆるものが意味を失って一般論に解消され，自分は藪の中に取残されるように感じられた.

飽和モデルはモデル理論では非常に重要である. この本では触れなかったが，《同型定理》も含めて，[7] や [8] が参考になるだろう.

ここで，超準解析の論文集としてつぎの四つを挙げておく：

[10] Applications of model theory to algebra, analysis and probability (ed. Luxemburg). Holt, Rinehart & Winston (1969)

[11] Contributions to non-standard analysis (ed. Luxemburg & Robinson). North-Holland (1972)

[12] Victoria symposium on nonstandard analysis [1972] (ed. Hurd & Loeb). Springer Lecture Notes in Math. **369** (1974)

[13] Proceedings of the Robinson memorial conference [Yale, 1975]. Israel J. Math. **25**全巻 (1976).

これらの中に，いろいろな工夫や応用（つまらないものも多い）を見つけることができる.

本書第四章の位相は主として [1] に基づく．ただし，ハール測度の存在証

明は私が考えた．また §5は，

[14] C. W. Puritz ; Quasimonad spaces : a nonstandard approach to convergence. Proc. London Math. Soc. (3) **32** (1976) 230-250

をもとにし，

[15] W. A. J. Luxemburg ; A general theory of monads. [10] 18-86

を参考にして私が整理したものである．[15] はほかにもいろいろの点で参考になった．また，[1] の後半は本書で扱わなかった一様構造の超準理論である．

第五章は，超函数に関する [3] の結果，線型形式や測度に関するロビンソン，ヘンソン等の結果をもとにし，それらを統一的，一般的に見通しよく扱う方法を与えたものである．このうち，補題**5.2.3**の有限値の場合の証明は新納文雄氏から教わった．お礼を申上げる．本書の方法によると，もとの論文より弱い条件から一般的な強い結果が出る．出発点となった論文は，[3] のほか，

[16] A.Robinson ; On generalized limits and linear functionals. Pacific J.Math. **14** (1964) 269-283

[17] C.W.Henson ; On the nonstandard representation of measures. Transactions Amer. Math. Soc. **172** (1972) 437-446

[18] A.R.Bernstein & F.Wattenberg ; Nonstandard measure theory. [10] 171-185

等である．第五章の結果はまだ不十分なものである．とくに，連続性や可算加法性の扱いに不満がある．これとはやや別の方向で面白そうなものに

[19] P. A. Loeb ; Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theoy. Transactions Amer. Math. Soc. **211** (1975) 113-122

がある．

超積ないし超準解析の応用としてもっとも早いのは

[20] Takeuti G. ; Dirac space. Proc. Japan Acad. **38** (1962) 414-418

だろう．

[21] J. Ax & S. Kochen ; Diophantine problems over local fields I. Amer. J.Math. **87** (1965) 605-630

も初期の重要な応用例である．最近の長い論文ないし本としては，

[22] A.Robinson & P.Roquette ; On the finiteness theorem of Siegel and Mahler concerning diophantine equations. J. Number theory **7** (1975) 121-176

[23] A. Robinson (written by Takeuti G.) ; A relatively effective procedure getting all quasi-integer solutions of diophantine equations with positive genuses. Preprint (1976)

[24] A. H. Lightstone & A. Robinson ; Nonarchimedean fields and asymptotic expansions. North-Holland (1975)

[25] P.A.Loeb ; Applications of nonstandard analysis to ideal boundaries in potential theory. Israel J. Math. **25** (1976) 154-187

等がある．

本書では代数や整数論への応用には触れなかったが，それについては上記 [21], [22], [23] のほか，ロビンソンにたくさん論文がある．

[26] Model theory and algebra ; a memorial tribute to Abraham Robinson (ed. Saracino & Weispfenning), Springer Lecture Notes in Math. **498** (1975)

にロビンソンの論文目録が出ている．

最後に一言．この本で採用した［1］の枠組，すなわち集合論と一階の論理に基づくものは必ずしも一般的ではない．そもそも超準解析は［3］の形で出発した．すなわち，タイプの理論に基づく高階の論理を使うものである．基礎論の立場から超準解析をやる人の間ではこの枠組がもっとも一般的である．これらのほか，

[27] A. Robinson & E. Zakon ; A set-theoretical characterization of enlargemens. [10] 109-122

[28] E.Zakon ; A new variant of nonstandard analysis. [12] 313-339

の提唱するものがある．これらも集合論に基づき，[1] より簡単だと自讃しているが，少くとも私には（特に等号の扱いが）それほど分りやすくなかった．やはり基礎論の専門家と普通の数学者との間にはまだ感覚のずれがある．

追記（1980年８月）　本書とほぼ同じころ，入門書が二つ出た：

[29] K. D. Stroyan & W. A. J. Luxemburg ; Introduction to the theory of infinitesimals. Academic Press (1976).

[30] M. Davis ; Applied nonstandard analysis. Wiley (1976).

どちらも最初の定式化が本書とすこし違う. [29] は包括的だが, 細かすぎるという人もいるだろう. [30]は講義をもとにしたもので, 簡潔である.

やはり同じころ, キースラーは論理式を使わない初等的な公理を考案し, これに基づいて初等微積分の教科書を書いた：

[31] H. J. Keisler ; Elementary calculus. Prindle, Weber & Schmidt (1976).

[32] H. J. Keisler ; Foundations of infinitesimal calculus. Prindle, Weber & Schmidt (1977). 日本語訳；無限小解析の基礎. 東京図書 (1979).

[31] は 900 ページをこす. [32] は本来は教師用またはセミナー用だが, 日本の大学の教科書によい. 訳書には例や問題が大幅に追加してある.

超準解析を集合論の枠で基礎づける理論として,

[33] E. Nelson ; Internal set theory. Bull. Amer. Math. Soc. **83**(1977) 1165–1198

[34] K. Hrbacek ; Axiomatic foundations for nonstandard analysis. Fund. Math. **98** (1978) 1–19

等が出た. これらの理論では, たとえば実数体 $\boldsymbol{R}$ と別に $^*\boldsymbol{R}$ を作るのではなく, $\boldsymbol{R}$ の中にすでに無限小実数が含まれている. 無限小は単なる道具ではなく, 本来的な対象であり, その意味で思想的に重要だと思う.

さて, Loeb [19] にはじまる新しい超準確率論は大いに発展し,

[35] R. M. Anderson ; A nonstandard representation for Brownian motion and Itô integration. Israel J. Math. **25** (1976) 15–46

[36] R. M. Anderson ; Star-finite probability theory. Dissertation, Yale University (1977)

[37] H. J. Keisler ; An Infinitesimal approach to stochastic analysis. Memoirs AMS **297** (1984)

等が現われた.

これらの著るしい成果はあるものの, 超準解析は一時ほど盛んでないよう

に思われる．思いつきで簡単にできることはすべてできてしまったということだろうか．各分野で Loeb [19] のような新しい発想の出ることが望まれる．

増補版への追加

1982 年に Davis [30] の日本語訳が出た．

[30′] デービス；超準解析．培風館 (1982).

ほかに入門的部分を含むものとして，

[38] A.E. Hurd & P.A. Loeb ; *An introduction to nonstandard real analysis.* Academic Press (1985)

[39] F. Diener ; *Cours d'analyse non standard.* Publ. Univ. Oran (1983)

[40] A. Robert ; L'analyse non standard. *Queen's papers p. & a. math.* **69** (1984)

[41] R. Lutz & M. Goze ; Nonstandard analysis, a practical guide with applications. *Springer LNM* **881** (1981)

等がある．[38] にはローブ測度を使った積分論への応用がある．[39]～[41] は枠としてネルソンの超準集合論 [33] を使う．フランス語圏の研究者はネルソン流が好きらしい．

[42] T. Kawai ; Nonstandard analysis by axiomatic method. *Southeast Asian Conference on Logic. Elsvier* (1983) 55–76

は超準集合論としてもっとも一般的かつ簡潔な公理系を提出し，それがツェルメロ-フレンケル集合論の保存拡大であることを証明している．

超準確率論はもっとも大きく発展した．

[43] N.J. Cutland ; Nonstandard measure theory and its applications. *Bull. London Math. Soc.* **15** (1983) 529–589

[44] P.A. Loeb ; *An introduction to nonstandard analysis and hyperfinite probability theory. Probabilistic analysis and related topics, vol.* 2. Academic Press (1979)

[45] K.D. Stroyan & J.M. Bayod ; *Foundations of infinitesimal*

stochastic analysis. North-Holland (1986)

[46] S. Albeverio, J. E. Fenstad, R. Høegh-Krohn & T. Lindstrøm; *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics.* Academic Press (1986).

どれも総合的に書いてある．測度空間が有限でない場合のローブ測度の一意性の証明は

[47] C.W. Henson; Unbounded Loeb measures. *Proc. AMS* **74** (1979) 143-150

および [45] にある．物理学への応用については，[46] のほか，

[48] 竹内外史；無限小解析と物理学．遊星社 (1985)

がある．つぎのものは基礎に重点を置いた総合報告である：

[49] 齋藤正彦；超準解析とはどういうものか．数学 **38** (1986) 133-149.

事 項 索 引

ア 行

一変項論理式　unary formula　39
一様超フィルター　uniform ultrafilter　31, 69
一様な持ちあげ　uniform lifting　169
一般連続体仮説
generalized continuum hypothesis　7
ウォッシュの定理　theorem of Łoś　48
宇宙　universe　34
うまく定義される　well-defined　16
S 可積分関数　S-integrable function　166
n 項関係　n-ary relation　36
n 変項論理式　n-ary formula　39
$\mathscr{L}$ 系　$\mathscr{L}$-system　43
延長された単子場　prolonged monad field　92
遠標準点　far-standard point　78

カ 行

開区間　open interval　5
外集合　external set　51
外的　external　51
下限　infimum, greatest lower bound　5
可算級広大化，広大モデル
ω-enlargement　63
可算級正則超フィルター
ω-regular ultrafilter　68
可算級善良超フィルター
ω-good ultrafilter　74
可算級非完備超フィルター
ω-incomplete ultrafilter　12
可算級飽和モデル　ω-saturated model　63
可算集合　countable set　7
可算濃度
cardinality of a countable set　7
κ 級広大化，広大モデル　κ-enlargement　62
κ 級正則超フィルター
κ-regular ultrafilter　68
κ 級正則対　κ-regularity pair　68
κ 級善良超フィルター　κ-good ultrafilter　72
κ 級飽和モデル　κ-saturated model　62
合併　union, sum　3, 34
函数　function　2, 36
函数記号　function symbol　38
カントル・デデキント式有限（無限）集合　7
偽　false　40
基数　cardinal number　6, 120
奇順序数　odd ordinal　120
帰納順序集合　inductively ordered set　6
共起する，共起的
satisfiable, concurrent　61, 64
共起性の原理　principle of concurrence　63
共分　intersection　3
極限基数　limit cardinal　121
極限順序数　limit ordinal　120
極小元　minimal element　5
極大元　maximal element　5
近標準点　near-standard point　78
偶順序数　even ordinal　120
区間　interval　5
原子論理式　atomic formula　38
項　term　38
高階の微分　differential of higher order　23
後続者基数　successor cardinal　121
後続者順序数　successor ordinal　120

広大化，広大モデル　enlargement　62

サ　行

最小元　least element　5
最大元　greatest element　5
自然数　natural number　120
写像　mapping　2,36
集合族　family of sets　3
自由超フィルター　free ultrafilter　12
自由変項　free variable　39
述語記号　predicate symbol　38
順序（関係）　order　5
順序集合　ordered set　5
順序数　ordinal number　119
順序対　ordered pair　35
準測度　quasi-measure　113
上限　supremum, least upper bound　5
上射　surjection　3
商集合　quotient set　4
乗法的（集合，写像）　multiplicative　72
真　true　40
推移的集合　transitive set　34
推移的単子場　transitive monad field　95
* 解釈　*-interpretation　43
* 帰納法　*-induction　47
* 集合　*-set　45
* 真　*-true　43,44
* 有限集合　*-finite set　54
* 有限列　*-finite sequence　55
* 有限和　*-finite sum　26,55
制限［写像の定義域の］　restriction　2
生成する（フィルター）　generate　11
正則超フィルター　regular ultrafilter　68
正則超冪モデル
　regular ultrapower model　70
整列可能定理　well-ordering theorem　6
整列集合　well-ordered set　6
整列順序　well-order　6
積集合　product set　2,3,36,37
全順序（集合）　totally ordered set　5
全称記号　universal quatifier　39
選択函数　choice function　3
選択公理　axiom of choice　3
全微分　total differential　24
善良超フィルター　good ultrafilter　72
善良超冪モデル
　good ultrapower model　74
増加写像　increasing mapping　72
双射　bijection　3
束縛変項　bound variable　39
存在記号　existential quantifier　38

タ　行

代入する（変項に定項を）　substitute　40
単型射　monomorphism　44
単項超フィルター　principal ultrafilter　10
単子　monad　19,78,80,90
単子場　monad field　78
単射　injection　3
値域　range　2
チホノフの定理　Tihonov's theorem　85
超限帰納法　transfinite induction　100
超限順序数　transfinite ordinal　120
超実数(体)　ultra-real number (field)　17,18
超準元　non-standard element　15,45
超準モデル　non-standard model　44
超積　ultraproduct　14
超フィルター　ultrafilter　10
超冪　ultrapower　14
超冪モデル　ultrapower model　47
直積　direct product　2,3,36,37
ツォルンの定理　Zorn's theorem　6
つぎの基数　7,121
つぎの順序数　120
定義域　domain　2
定項　constant　38
適合する　57
添字域　index set　3

点列　sequence　3
同型［$\mathscr{L}$ 系が］ isomorphic　44
同型射［$\mathscr{L}$ 系の］ isomorphism　44
同時に成りたつ　satisfiable, concurrent　61
同値関係　equivalence relation　4
同値類　equivalence class　4
同調する［分割の集合とフィルターとが］ 122
等濃　equipotent　6

ナ　行

内集合　internal set　51
内的　internal　51
二項関係　binary relation　2, 36
二変項論理式　binary formula　39
濃度　cardinality, power　6, 120

ハ　行

微細分割　fine partition　57
非単項超フィルター
non-principal ultrafilter　10
微分　differential　23
標準元　standard element　15, 45
標準部分　standard part　19, 80, 91
標準モデル　standard model　44
フィルター　filter　9, 90
フィルター基底　filter basis　10
フレシェ・フィルター　Fréchet filter　9
文　sentence　39
分割　partition　4, 57
閉区間　closed interval　5
冪集合　power set　2
変項　variale　38
飽和モデル［κ 級］ κ-saturated model　62

マ　行

無共分族　disjoint family　3
無限基数　infinite cardinal　6, 120
無原子（準）測度
non-atomic (quasi-) measure　114
無限小近傍
infinitesimal neighbourhood　79
無限小群　infinitesimal group　86
無限小超実数
infinitesimal ultra-real number　17
無限大超自然数
infinite ultra-natural number　17
無限大超実数
infinite ultra-real number　17
無限に近い　infinitely close　19, 78, 80
持ちあげ［実関数の］ lifting　169
持ちあげ［ローブ可測関数の］ lifting　161
モデル　model　43
モデル同値の原理
principle of model equivalence　43
モナド　monad　19, 78

ヤ　行

有界　bounded　5
有限基数　finite cardinal　6, 120
有限共起的　(finitely) concurrent,
finitely satisfiable　61, 64
有限交差的
with finite intersection property　10
有限順序数　finite ordinal　120
有限超実数　finite ultra-real number　17

ラ　行

領域［* 集合の］ scope　51
量記号　quantifier　39
連続体仮説　continuum hypothesis　7
連続濃度　cardinality of continuum　7
ローブ空間　Loeb space　160
ローブ測度　Loeb measure　160
論理（結合）記号
logical symbol, connective　38
論理式　formula　38

記 号 索 引

$\emptyset$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$	1
$A-B$, $\mathscr{P}(A)$, $f\|C$, $\mathrm{Map}(A, B)$, ${}^{A}B$, $f: x \mapsto y$	2
$\bigcup X$	3, 34
$\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$	5
$\|A\|$, α^{β}	6
ω, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$	7
$\mathscr{F}_0(I)$	9
$\prod_{\mathscr{F}} X(i)$, $[\alpha(i)]$	14
$\alpha \fallingdotseq \beta$, $\alpha \fallingdotseq a$, $\mu(a)$, $\mathrm{st}[\alpha]$	19, 78, 80
$\hat{\alpha}$, $\hat{a}$	51, 53
$o(\alpha)$, $o(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$	24
${}^{*}\sum_{\nu=1}^{\lambda} \alpha(\nu)$	26, 55
pr, ap	36
pr, ap, $\mathscr{C}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{L}$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$	38～39
$\mathscr{U}$, ${}^{*}\mathscr{U}$, ${}^{*}\mathscr{L}$, ${}^{*}\mathscr{C}$, $\models$, ${}^{*}\models$, $\exists!$	40～44
${}^{*}\|A\|$	55
$\mathscr{Q}(X)$, $\mathscr{S}(X)$	67
$\mathscr{V}(a)$, $\mathscr{T}(a)$, $\mathscr{N}(X)$, $\mu(A)$	78～80
$\mathrm{Mon}\,\mathscr{S}$, $\mathrm{Fil}\,M$	90
$\tilde{\mu}(\alpha)$, $\boldsymbol{M}$	92
$\boldsymbol{R}^{+}$, $\boldsymbol{R}^{++}$, $\bar{\boldsymbol{R}}$, $\bar{\boldsymbol{R}}^{+}$	105, 107

著者紹介

齋藤正彦（さいとう まさひこ）

1931年　東京生れ
1954年　東京大学理学部数学科卒業
1962年　東京大学教養学部助教授
1974年　東京大学教養学部教授
理学博士
著　書　線型代数入門（東大出版会）
線型代数演習（東大出版会）
数とことばの世界へ（日本評論社）

超積と超準解析〔増補新版〕
ノンスタンダード・アナリシス

1976年9月28日　第1刷発行
1987年4月20日　増補第1刷発行
1992年1月25日　新装第1刷発行

検印省略

著者　齋藤正彦
発行所　東京図書株式会社
〒112 東京都文京区水道2—5—22
振替東京4-13803 電話(3814)7818〜9

ISBN 4-489-00374-9

人文科学系　大学院案内　宮崎孝一監修

社会科学系　大学院案内　千種義人監修

理学工学系　大学院案内　渡辺　茂監修

農学薬学系　大学院案内　逸見謙三 野島庄七 監修

医学歯学系　大学院案内　高久史麿監修

東京図書